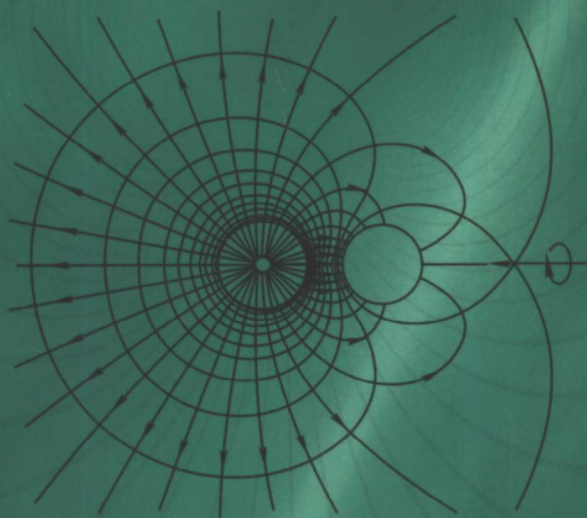


面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

工程电磁场导论

冯慈璋　马西奎　主编





高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

工程电磁场导论

冯慈璋　马西奎　主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书教育部《面向21世纪高等教育教学内容和课程体系改革计划》项目研究成果，是面向21世纪课程教材。本书由西安交通大学电工原理教研室在多年教学研究和实践的基础上编写而成。全书上较好地处理了与物理学中电磁学相衔接的内容。与《电磁场》(冯慈璋主编)相比，删去了狭义相对论和各向异性媒质中电磁场的内容，增加了准静态电磁场和波导与谐振腔的相应内容，不仅保证了强电专业对电磁场理论课程的基本要求，也适当拓展了强电专业的电磁场知识范围。书中突出了电磁场理论在工程实际中的应用，并配有丰富的例题、思考题和习题。

本书适用于电气工程与自动化类学科各专业，也可作为选修课教材或供社会读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场导论/冯慈璋，马西奎主编．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-007988-7

Ⅰ．工…　Ⅱ．①冯…②马…　Ⅲ．电磁场
Ⅳ．O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第17621号

工程电磁场导论

冯慈璋　马西奎　主编

出版发行　高等教育出版社

社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009

电　　话　010-64054588　　传　　真　010-64014048

网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所

印　　刷　中国科学院印刷厂

纸张供应　山东高唐纸业集团总公司

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　2000年6月第1版

印　　张　23　　印　　次　2000年6月第1次印刷

字　　数　420 000　　定　　价　19.50元

内容提要

本书教育部《面向21世纪高等教育教学内容和课程体系改革计划》项目研究成果，是面向21世纪课程教材。本书由西安交通大学电工原理教研室在多年教学研究和实践的基础上编写而成。全书上较好地处理了与物理学中电磁学相衔接的内容。与《电磁场》(冯慈璋主编)相比，删去了狭义相对论和各向异性媒质中电磁场的内容，增加了准静态电磁场和波导与谐振腔的相应内容，不仅保证了强电专业对电磁场理论课程的基本要求，也适当拓展了强电专业的电磁场知识范围。书中突出了电磁场理论在工程实际中的应用，并配有丰富的例题、思考题和习题。

本书适用于电气工程与自动化类学科各专业，也可作为选修课教材或供社会读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场导论/冯慈璋，马西奎主编．—北京：高等教育出版社，2000

ISBN 7-04-007988-7

Ⅰ．工… Ⅱ．①冯… ②马… Ⅲ．电磁场
Ⅳ．0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第17621号

工程电磁场导论
冯慈璋 马西奎 主编

出版发行 高等教育出版社

社　址 北京市东城区沙滩后街55号　　**邮政编码** 100009
电　话 010-64054588　　**传　真** 010-64014048
网　址 http://www.hep.edu.cn

经　销 新华书店北京发行所
印　刷 中国科学院印刷厂
纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

开　本 787×960 1/16　　**版　次** 2000年6月第1版
印　张 23　　**印　次** 2000年6月第1次印刷
字　数 420 000　　**定　价** 19.50元

前　言

电磁场理论是高等学校工科电类专业的一门技术基础课。它所涉及的内容是电类专业学生应具备的知识结构的必要组成部分，同时又是一些交叉领域的学科生长点和新兴边缘学科发展的基础。学好这门课程将增强学生的适应能力与创造能力。

本书是为高等学校工科电类专业本科生学习电磁场理论课程而编写的教学用书，并于1998年经教育部批准为面向21世纪课程教材。

编写《工程电磁场导论》教材的主要目标是：为了适应当前高等教育改革中注重素质培养和能力培养、加强基础、拓宽专业的需要。在编写中，编者主要作了如下的考虑：

(1) 到下个世纪初，目前电磁场理论作为一门主干(核心)课程的框架仍将基本保持不变。它仍然是以经典内容为主，也仍然是电类专业技术的基础。但是，应该重新审视、选择和组织教学内容，处理好基础部分与深入内容、传统方法与现代观点之间的关系，不宜片面强调电磁场理论学科本身的系统性和完整性。应该明确本门课程是作为专业学习的基本支撑，是为学科方向服务的。

(2) 突出电磁场的普遍规律，注重教材的基础性，使学生对基础知识牢固掌握、灵活运用。注重基本概念、基本规律和基本的分析计算方法。

(3) 注意应用性和实践性(即工科特色)的体现。重视工程问题的电磁模型的建立和定性分析，有意识地培养学生从定性的方法入手提出问题和分析问题的能力。

(4) 协调好本课程与前后课程之间的关系。让学生充分发挥已掌握的数学知识和技能，把物理概念和数学工具妥善地结合起来处理电磁问题。

(5) 加强计算能力的训练。我们相信，要全面掌握这门课，没有一定数量且能应用这些基本方法的练习是不可能完成的。

在上述指导思想下，本书的编写遵循由特殊到一般、由简单到复杂、循序渐进的原则，在内容的安排上适当兼顾了强电和弱电专业的要求。概括起来，本书的主要特点：

(1) 在每一章节中，设立有小标题，使得重点突出，层次分明，便于学习。

(2) 突出准静态电磁场的分析，并单独设章。这些内容过去不太被注意，

但工程中的电磁场问题则有很多属于这一类。

(3) 边值问题没有单独设章，把“边值”这一概念贯穿于全书的各章节中去。这样，在理论部分含有计算问题，在计算部分含有理论问题，而不是把理论与计算截然分开，有助于学生树立起建立电磁模型的习惯。

(4) 精心配备例题和习题。本书列举了相当数量的例题。这些例题与正文密切配合，以利于学生更好地理解和掌握基本概念和基本分析方法。各节次之后都配有密切配合本节内容的习题，可以让学生验证他们对内容的理解程度。此外，结合课程特点，每章之后还配备有思考题，同时选编了不同层次的习题，供学生深入钻研，为教师布置课外作业提供了更多的灵活性，并提供因材施教的余地。

全书共分八章，分别是：静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、准静态电磁场、平面电磁波的传播、均匀传输线中的导行电磁波、波导与谐振腔。把矢量分析另列于附录中。每章末均附有小结。书末附有部分习题答案。本书的部分章节相对独立性，在教学中可以根据各自的需要取舍。

本书由冯慈璋、马西奎主编。第一、五章由马西奎执笔，第二、三章由刘补生执笔，第四、八章和附录 A 由邱捷执笔，第六、七章由王仲奕执笔。书稿承蒙浙江大学倪光正教授和华北电力大学崔翔教授仔细审阅，提出了许多宝贵修改意见。本书的立项和出版得到了教育部“电路、信号系统和电磁场课程”教学指导小组，高等教育出版社和西安交通大学的大力支持和资助。谨在此一并表示衷心的感谢。

对于书中不妥和错误之处，衷心欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。意见请寄西安交通大学电气工程学院电工原理教研室(邮编 710049)。

编 者

一九九九年十月

于西安交通大学

责任编辑　林　宇
封面设计　张　楠
责任绘图　尹　莉
版式设计　马静如
责任校对　俞声佳
责任印制　宋克学

目　　录

第一章 静 电 场

相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场,称为静电场。本章首先介绍静电场中最主要的场量——电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和标量电位 φ。从库仑定律出发,在分析真空中静电场的基础上,分别讨论导体和电介质对电场的影响。电介质的影响可归结为极化后出现的极化电荷所产生的影响,从而引入电极化强度矢量 $\boldsymbol{P}$。在研究电场强度矢量闭合面积分的基础上,引入电通[量]密度(又称电位移)$\boldsymbol{D}$,并导得高斯定律 $\left(\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q\right)$,它与静电场无旋特性 $\left(\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\right)$ 一起,构成静电场的积分形式的基本方程。

应用积分形式的基本方程,导得不同媒质分界面上的衔接条件。应用微分形式的基本方程($\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$),导出电位 φ 满足的泊松方程($\nabla^2\varphi=-\rho/\varepsilon$)和拉普拉斯方程($\nabla^2\varphi=0$)。把静电场问题归结为在给定边界条件下求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题。

在讨论静电场问题解答唯一性的基础上,先介绍三种直接解法——直接积分法、分离变量法和有限差分法,然后介绍两种重要的特殊解法——镜像法和电轴法。

本章将电容概念推广于多导体系统,引入部分电容。从场的角度,讨论了静电能量的计算和静电能量的分布,引入静电能量密度。最后,重点讨论应用虚位移法求电场力,并介绍关于电场力的法拉弟观点。

§1-1 电场强度·电位

电荷的周围,存在着一种特殊形式的物质,称为电场。电场是统一的电磁场的一个方面,它的表现是对于被引入场中的静止电荷有力的作用。相对于观察者为静止的、且其电荷量不随时间变化的电荷所引起的电场,即为静电场。本节首先从库仑定律出发引入静电场的一个基本场量——电场强度 $\boldsymbol{E}$。在应用矢量分析阐明静电场具有无旋特性的基础上,引入静电场的另外一个重要的场量——标量电位 φ,简称电位。

1.1.1 电场强度

1785年，法国学者库仑(Coulomb)在做了一系列精巧的静电实验后总结出：在无限大真空中，当两个静止的小带电体之间的距离远远大于它们本身的几何尺寸时，该两带电体之间的作用力可表示为

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_{21}}{R^2} \tag{1-1a}$$

和

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\boldsymbol{e}_{12}}{R^2} \tag{1-1b}$$

这一规律称为库仑定律。以上两式中，q_1 和 q_2 分别是两带电体的电荷量。R 是两带电体之间的距离，$\boldsymbol{e}_{21}$和 $\boldsymbol{e}_{12}$是沿两带电体之间连线方向的单位矢量，前者由 q_2 指向 q_1，后者由 q_1 指向 q_2。ε_0 是真空的介电常数。$\boldsymbol{F}_{12}$是带电体 q_2 对带电体 q_1 的作用力，$\boldsymbol{F}_{21}$是带电体 q_1 对带电体 q_2 的作用力。

本书采用国际单位制(简称国际制,代号为 SI)。在库仑定律的表达式中，电荷量的单位是 C(库)，距离的单位是 m(米)，力的单位为 N(牛)。ε_0 的单位是 F/m(法/米)，其值为 $10^{-9}/36\pi = 8.85\times10^{-12}$。

库仑定律适用的条件是带电体本身的几何尺寸远远小于它们之间的距离。在这样的条件下可以把带电体看成一个几何上的点，称为点电荷。物理上并不存在真实的点电荷，“点”只是相对意义上的概念。

库仑定律给出了两点电荷之间作用力的量值与方向，但并未说明作用力是通过什么途径传递的。历史上，围绕静电力的传递问题有过多年的争论。现在已经知道，电荷之间的作用力是通过其周围空间中存在的一种特殊物质——电场，以有限速度传递的。任何电荷都在其周围空间产生电场。电场的一个重要特性是对处在其中的任何其它电荷都产生作用力，人们引入物理量——电场强度来描述电场的这一重要特性。

设在电场中某 P 点置一带正电的试验电荷 $q_0$①，电场对它的作用力为 $\boldsymbol{F}$，则电场强度(简称场强)定义为

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q_0\to0}\frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \tag{1-2}$$

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是一个随着空间点位置不同而变化的矢量函数，仅与该点的电场有关，而与试验电荷的电荷量无关。在 SI 中，$\boldsymbol{E}$ 的单位是 V/m(伏/米)。

根据电场强度的定义和库仑定律，可以得到位于坐标原点上的点电荷 q

---

① 试验电荷——是指一电荷量足够小的点电荷，以致它的引入对被测电场的影响可以略去不计。

在无限大真空中引起的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1-3}$$

如果点电荷 q 所在处的坐标为$\boldsymbol{r}'$,则它在点 $\boldsymbol{r}$ 引起的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_R \tag{1-4}$$

在(1-4)式中涉及空间的两个点，如图 1-1 所示。一个是电荷量为 q 的点电荷所在的位置,其坐标为(x',y',z'),简称“源点”;另一个是需要确定场量的

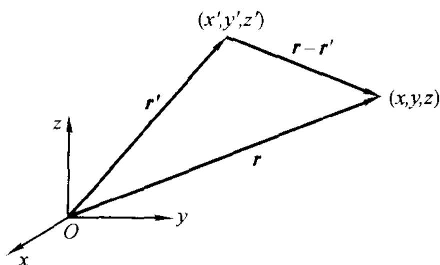


图 1-1 源点与场点坐标的矢量表示

点,其坐标为(x,y,z),简称“场点”。本书用加撇的坐标(x',y',z')或 $\boldsymbol{r}'$ 表示源点,用不加撇的坐标(x,y,z)或 $\boldsymbol{r}$ 表示场点。

1.1.2 叠加积分法计算电场强度 $\boldsymbol{E}$

(1-4)式还说明，在电场中的任何一个指定点，电场强度与产生电场的点电荷的电荷量成正比。场与源之间的这种线性关系使人们可以利用叠加原理来计算 n 个点电荷所形成场的电场强度，即在电场中某一点的电场强度等于各个点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和。它的数学表达式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{R_k^2}\boldsymbol{e}_{R_k} \tag{1-5}$$

对于以体密度 $\rho(\boldsymbol{r}')$ 连续分布在 V 中的体积电荷，它所产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V' \tag{1-6}$$

参看图 1-2。

同样，对于面积电荷和线电荷，它们所产生的电场强度分别为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S' \tag{1-7}$$

和

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}l' \tag{1-8}$$

式中，$\sigma(\boldsymbol{r}')$ 和 $\tau(\boldsymbol{r}')$ 分别是对应的电荷面密度和电荷线密度。一般若已知真空中的电荷分布，原则上都可由上面各式计算电场强度。但都是矢量积分公式，运算比较复杂。

例 1-1 如图 1-3 所示，真空中有一以线密度 τ 沿 z 轴均匀分布的无限长线电荷，试求离其 ρ 处的电场。

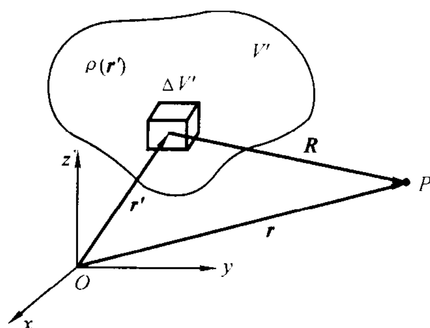


图 1-2 体积电荷的电场

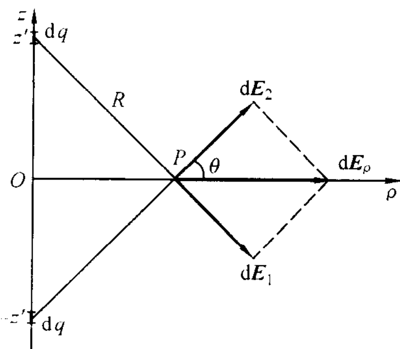


图 1-3 线电荷的电场

解： 如图 1-3 所示，在 z' 处的元电荷 $\tau\mathrm{d}z'$ 所产生的电场为 $\dfrac{\tau\mathrm{d}z'}{4\pi\varepsilon_0R^2}$，方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$；而在 $(-z')$ 处对应的元电荷 $\tau\mathrm{d}z'$ 产生一大小相等，方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$ 的电场，两者合成则得方向为径向的合成场 $\mathrm{d}E_\rho$。故总电场的方向为径向，它是所有元电荷产生电场的矢量和，即

$$\boldsymbol{E}(\rho) = 2\int_0^{\infty}\frac{\tau\mathrm{d}z'\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}\boldsymbol{e}_\rho$$

因为 $R=\sqrt{z'^2+\rho^2}$ 及 $\cos\theta=\rho/R$，故

$$\boldsymbol{E}(\rho) = \frac{\tau\rho}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}z'}{(z'^2+\rho^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$$

这说明：以线密度 τ 均匀分布的无限长线电荷周围的电场垂直于线电荷，场强与坐标 z、ϕ[①] 无关，与垂直距离 ρ 成反比。

---

① 为避免与标量电位 φ 相混淆，本书中用字母 ϕ 表示坐标系中的 φ 角。

例 1-2 一均匀带电的无限大平面,其电荷面密度为 σ,求距该平面前 x 处的电场。

解: 从观察点向平面作垂线,以垂线与平面的交点为圆心,以半径 a 作一环形元电荷,根据对称性,此环形元电荷的电场方向垂直于带电平面。故总电场的量值为(参看图 1-4)

$$E(x)=\int_0^{\infty}\frac{2\pi\sigma a\,\mathrm{d}a}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{a\,\mathrm{d}a}{(a^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

这说明:均匀带电的无限大平面两边的电场均垂直于带电平面,场强为恒值 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$,平面两侧电场强度的方向相反。

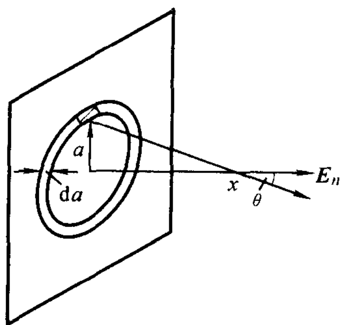


图 1-4 均匀带电无限大平面面积电荷的电场

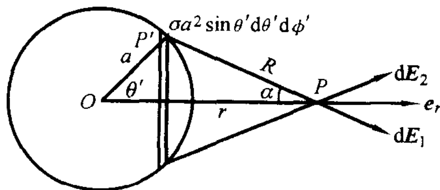


图 1-5 均匀球面电荷外的电场

例 1-3 一半径为 a 的球面上均匀分布有电荷,其电荷面密度为 σ,求此球面电荷的电场。

解: (1) 球外电场

如图 1-5 所示,以 P 点与球心连线为球坐标的极轴($\theta=0$),则 P 点的坐标为(r,0,0)。在球面上,P' 点的坐标为(a,θ',ϕ'),取面元 $a\mathrm{d}\theta' a\sin\theta'\mathrm{d}\phi'$,可把其上的面电荷 $\sigma a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$ 看成一个点电荷,与 $P(r,0,0)$ 点的距离为 R,这个面电荷在 P 点建立的电场 $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'}{R^2}$,方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1$。而在对称点($a,\theta',\phi'+180°$)处的元电荷 $\sigma a^2\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$ 产生一大小相等的电场,方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_2$,两者合成则得径向的合成场 $\mathrm{d}E_r$。故总电场的方向为径向,它是所有元电荷产生电场的矢量和,即

$$E_r(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma a^2\sin\theta'\cos\alpha}{R^2}\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

因为 $\cos\alpha=\dfrac{r^2+R^2-a^2}{2rR}$，$\cos\theta'=\dfrac{r^2+a^2-R^2}{2ra}$，故 $\sin\theta'\mathrm{d}\theta'=-\mathrm{d}\cos\theta'=\dfrac{R\mathrm{d}R}{ra}$。将上述 E_r 积分式的积分变量换为 $\mathrm{d}R$，$\theta'=0$ 时，$R=r-a$；$\theta'=\pi$ 时，$R=r+a$，

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{r-a}^{r+a}\frac{\sigma a^2 R\,(r^2+R^2-a^2)}{ra\times 2rR\times R^2}\mathrm{d}R\mathrm{d}\phi' \\
&= \frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}\int_{r-a}^{r+a}\frac{r^2+R^2-a^2}{2r^2R^2}\mathrm{d}R \\
&= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2r^2}\right)\left(R-\frac{r^2-a^2}{R}\right)\Bigg|_{r-a}^{r+a} \\
&= \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}
$$

设球面上有电荷总量 Q，则上式可化为

$$
E_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}
$$

这说明：均匀球面电荷在球外建立的电场反比于场点与球心距离的平方，相当于把球面上的电荷集中到球心所形成的点电荷的电场。

(2) 球内电场

对于球内电场，上面的积分下限应换成 $a-r$，则

$$
E_r=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2r^2}\right)\left(R-\frac{r^2-a^2}{R}\right)\Bigg|_{a-r}^{a+r}=0
$$

这说明：均匀球面电荷在球内建立的电场恒为零。

以上关于球外和球内电场的计算结果是在电荷沿球面均匀分布的前提下得到的，即电荷在 θ 及 ϕ 方向均匀分布。由此可得出推论：对于球形体积电荷只要每层的电荷体密度是均匀的，即电荷体密度在 θ 及 ϕ 的方向是常数，则在球外建立的电场相当于全部电荷集中到球心所形成的点电荷的电场。而球内的电场应等于场点以内的那部分球体电荷集中在球心时所建立的电场。因为场点以外的沿 θ 及 ϕ 方向均匀分布的球壳电荷在该场点建立的电场为零。

1.1.3 电位

现在来研究将一个单位正试验电荷 q_0 在静电场中沿某一路径 l 从 A 点移至 B 点（如图 1－6 所示）时，电场力所作的功，即

$$
W=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-9}
$$

如果电场由点电荷 q 单独产生，则 $\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}$，从而有

$$W = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \quad (1-10)$$

这个功只与两端点有关，而与移动时的具体路径无关。在 $\boldsymbol{E}$ 由许多电荷产生的一般情况下，电场力所作的功也是与路径无关的。

如果试验电荷在静电场中沿一闭合路径 l 从 A 点出发经过 B 又回到 A 点（如图 1-7），则电场力所作的功

$$W = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_A}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A}\right) = 0 \quad (1-11)$$

即在静电场中，沿闭合路径移动电荷，电场力所做功恒为零。换句话说，电场强度的环路线积分恒等于零，通常写成

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad (1-12)$$

这是静电场的重要性质。因为任意静电场都可看作是由许多点电荷的静电场叠加的结果，所以该结论对于任意静电场也是正确的。(1-12)式称为静电场的环路定律。

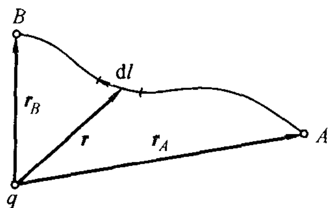


图 1-6 电荷 q_0 沿路径 l 从 A 点移至 B 点

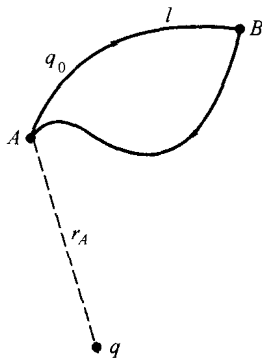


图 1-7 电荷 q_0 沿闭合路径移动

应用斯托克斯定理于(1-12)式，则

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

由于上式中的面积分在任何情况下都为零，因此被积函数必处处恒为零，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \quad (1-13)$$

上式表明，静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的旋度到处为零。因此，通常也说静电场是一个无旋场。

由矢量分析知，任意一个标量函数的梯度的旋度恒等于零。因此，静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可以由一个标量函数 φ 的梯度表示，即定义

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \tag{1-14}$$

这个标量函数 φ 称为静电场的标量电位函数。它是表征静电场特性的另一个物理量。电位函数 φ 在空间某一点的值称为该点的电位。在 SI 中，其单位是 V(伏)。上式中的负号表示 $\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\nabla\varphi$ 的方向相反，即 $\boldsymbol{E}$ 指向电位函数 φ 最大减小率的方向。

前面(1－9)式中给出了单位正试验电荷在电场中移动时，电场力对电荷所作的功。将(1－14)式代入该式，有

$$W = \int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_A^B \nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由矢量运算

$$\nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}\varphi$$

因此，

$$W = -\int_A^B \nabla\varphi\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \mathrm{d}\varphi = \varphi_A - \varphi_B \tag{1-15}$$

这就是说，单位正试验电荷从 A 点移到 B 点时，电场力所作的功就是这两点的电位差，即

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-16}$$

因电场 $\boldsymbol{E}$ 的线积分与路径无关，所以任意两点间的电位差具有确定的数值。把两点间的电位差定义为此两点间的电压 U，即

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-17}$$

上式表明，静电场中两点间的电压，也等于由一点到另一点移动单位正点电荷时电场力所作的功。在 SI 中，电压的单位也是 V。

虽然两点间的电位差有确定的数值，但适合公式(1－14)式的电位函数并不唯一确定。因为如果 φ 是静电场 $\boldsymbol{E}$ 的电位函数，取 $\varphi' = \varphi + C$(任意常数),则

$$-\nabla\varphi' = -\nabla(\varphi + C) = -\nabla\varphi = \boldsymbol{E}$$

所以 φ' 也是静电场 $\boldsymbol{E}$ 的电位函数。也就是说，φ 与 $\varphi + C$ 这两个电位函数代表同样的电场 $\boldsymbol{E}$。这表明电位的值是相对的。因此，为了得到确定的电位值，可以人为地选定空间某点 Q 作为电位的参考点。不管 Q 点如何选取，一经确定后，空间任一点 P 都有确定的单一电位值 φ_P，即

$$\varphi_P = \int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-18}$$

φ_P 也可称为P点相对于Q点的电位。参考点不同,电位值也不同。显然参考点Q的电位为零。上式也表明,空间某一点的电位就是将单位正试验电荷从该点移至指定的参考点时,电场力对电荷所作的功。

在工程中,常把大地表面作为电位参考点。而在理论分析时,只要产生电场的全部电荷都处于有限空间内,不管电荷如何分布,选取无限远处为参考点对电位计算将带来很大的方便。这时,任意点 P 的电位为

$$\varphi_P = \int_P^{\infty} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-19}$$

将(1-3)式代入上式,即得位于坐标原点的点电荷在无限大真空中引起的电位

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1-20}$$

1.1.4 叠加积分法计算电位 φ

对于场源既有点电荷又包含体积电荷分布 $\rho(\boldsymbol{r}')$、面积电荷分布 $\sigma(\boldsymbol{r}')$ 和线电荷分布 $\tau(\boldsymbol{r}')$ 的一般情况,由叠加原理可得场点 $\boldsymbol{P}$ 上的电位表达式为

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_k'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l'}\frac{\tau(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}l \tag{1-21}$$

这一积分式基于无限远处电位为零的条件。

设想电荷分布延拓至无限远时,无限远处的电位成为无限大,这时若仍将无限远点选为电位的参考点,(1-21)式中的积分将趋向无限大,因而失效。在这种情况下,应在有限空间内选择电位参考点。

标量电位函数的引入,把静电场这样一个矢量场问题化为一个标量场问题,给分析问题带来了很大方便。

例 1-4 求电荷面密度为 σ,半径为 a 的均匀带电圆盘轴线上的电位和电场强度。

解:如图 1-8 所示,在圆盘上取一半径为 r 宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环,环上元电荷

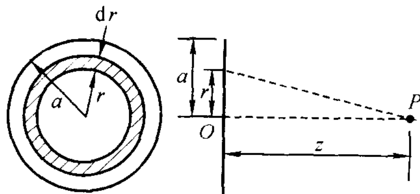


图 1-8 均匀带电圆盘

$\mathrm{d}q=\sigma(2\pi r)\mathrm{d}r$,环上各点至 P 点距离皆为$R=\sqrt{r^2+z^2}$,在轴线上 P 点所产生的电位

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{1/2}}=\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)^{1/2}}$$

整个圆盘上电荷在 P 点所产生的电位

$$\varphi=\int_0^a\frac{\sigma r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0(r^2+z^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r^2+z^2)^{1/2}\Big|_0^a$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(a^2+z^2)^{1/2}-z] & (z>0)\\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(a^2+z^2)^{1/2}+z] & (z<0)\end{cases}$$

由电荷分布对称性可知，在轴线上电场强度只有 z 向分量，即

$$\boldsymbol{E}=E_z\boldsymbol{e}_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}+1\right]\boldsymbol{e}_z & (z>0)\\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\dfrac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}-1\right]\boldsymbol{e}_z & (z<0)\end{cases}$$

圆盘中心的电位

$$\varphi=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}a$$

而圆盘中心表面处的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & (z=0^+)\\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z & (z=0^-)\end{cases}$$

注意圆盘面两侧电位 φ 连续而电场强度 $\boldsymbol{E}$ 不连续。

例 1-5 如图 1-9 所示，两点电荷 $+q$ 和 $-q$ 相距为d。当 $r\gg d$ 时,这一对等量异号的电荷 $\pm q$,称为电偶极子。计算任一点 P 处的电位和电场强度。

解：应用叠加原理，由(1-20)式得场中任意点 P 的电位为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2-r_1}{r_2r_1}\right)$$

因 $r\gg d$,则 $r_1r_2\approx r^2$,$r_2-r_1\approx d\cos\theta$, 所以有

$$\varphi=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0r^2}$$

上式也可以改写成

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} \qquad (1-22)$$

式中 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$，称为电偶极子的电偶极矩。$\boldsymbol{p}$ 的方向是由负电荷指向正电荷，单位为 C·m（库·米）。

应用关系式 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，可以求得位于原点的电偶极子在离它 $\boldsymbol{r}$ 远处产生的电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r+\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \qquad (1-23)$$

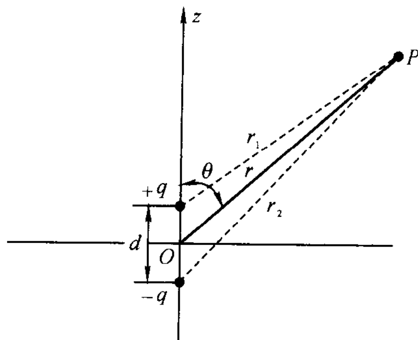


图 1-9 电偶极子

1.1.5 电力线和等位面(线)

在研究场的问题时，为了使场形象化，通常需要作场的分布图形。在描述静电场的图形中，最常见的是电场强度线(简称 $\boldsymbol{E}$ 线,也称电力线)和等位面(线)(等位线是指等位面和空间中某一平面相交而得的截迹)。

$\boldsymbol{E}$ 线是这样一种曲线，曲线上每一点的切线方向与该点电场强度方向一致。若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是电力线的长度元，则该 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处的 $\boldsymbol{E}$ 矢量将与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向一致，故

$$\boldsymbol{E}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \qquad (1-24)$$

该式就是电力线的微分方程。它的解即为 $\boldsymbol{E}$ 线的方程。

在静电场中，将电位相等的点连接起来形成的曲面，称为等位面，它的方程为

$$\varphi(x,y,z)=C \qquad (1-25)$$

C 取不同数值可得到一个等位面族。

等位面和 $\boldsymbol{E}$ 线是到处正交的。在场图中，相邻两等位面之间的电位差应相等，这样才能表示出电场的强弱。等位面愈密处，场强愈大。

例 1-6 画出电偶极子的等位线和电力线。

解：由例 1-5 和(1-25)式，得电偶极子的等位面方程为

$$\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\text{const}$$

由此

$$r=C\sqrt{\cos\theta}$$

取不同的 C 值,即对应不同的电位 φ,可画出 r 对 θ 的曲线，如图 1-10 中的虚线所示。在球坐标系中，电力线的微分方程(1-24)式转化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{E_r}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{E_\theta}=\frac{r\sin\theta\mathrm{d}\phi}{E_\phi}$$

对于电偶极子，电场没有 ϕ 向分量，故

$$\frac{\mathrm{d}r}{2\cos\theta}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}$$

积分得

$$r = C'\sin^2\theta$$

式中 C' 为一常量。电力线如图 1－10 中实线所示。

图 1－11 给出了两种典型的场图。

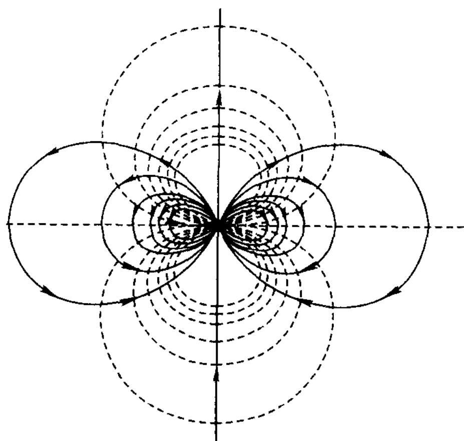
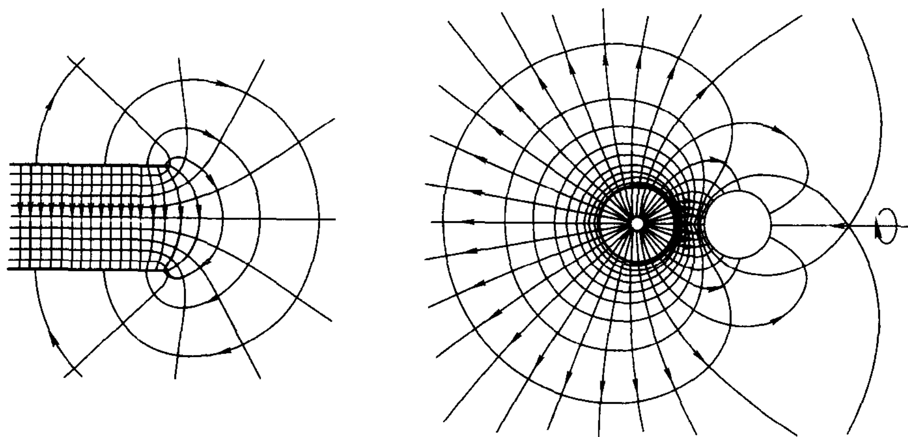


图 1－10　电偶极子的等位线和电力线



(a) 平板电容器端部　　(b) 点电荷与导体球

图 1－11　等位线和电力线

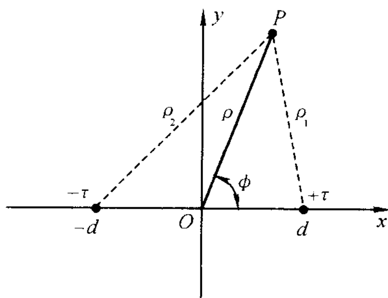
习 题 (1-1)

1-1-1 真空中有一密度为 2π nC/m 的无限长线电荷沿 y 轴放置,另有密度分别为 0.1 nC/m^2 和 -0.1 nC/m^2 的无限大带电平面分别位于 $z=3$ m 和 $z=-4$m 处。试求 P 点 (1,7,2) 的电场强度 $\boldsymbol{E}$。

1-1-2 一充满电荷(电荷体密度为常数 ρ_0)的球,证明球内各点场强与到球心的距离成正比。

1-1-3 已知电位函数 $\varphi=\dfrac{10}{x+y^2+z^3}$,试求 $\boldsymbol{E}$,并计算在(0,0,2)及(5,3,2)点处的 $\boldsymbol{E}$ 值。

1-1-4 证明两等量而异号的长直平行线电荷场中的等位面是一组圆柱面。



题 1-1-4 图 等量异号平行线电荷

§1-2 高 斯 定 律

前面一节讨论的是自由电荷在无限大真空中引起的静电场,有意回避了在场域内的某些部分可能存在实体物质的一般情况。实验表明,实体物质的存在必将影响和改变自由电荷在无限大真空中引起的静电场的分布。本节首先介绍实体物质在静电场中的性质和表现,然后引入电通[量]密度 $\boldsymbol{D}$,得到一般形式的高斯定律,并据此定义电介质的介电常数。

根据物体的静电表现,可以把它们分成两大类:导电体(即导体)和绝缘体(也称为电介质)。

1.2.1 静电场中的导体

导体的特点是其中有大量的自由电子,因此导体为自由电荷可以在其中自由运动的物质。当将导体引入外电场中以后,其自由电荷将会在导体中移动,

原来的静电平衡状态被破坏。自由电荷的移动将使其积累在导体表面，并建立附加电场，直至其表面电荷(这些电荷也称为感应电荷)建立的附加电场与外加电场在导体内部处处相抵消为止，这样才达到一种新的静电平衡状态。这时，将出现下列现象：第一，导体内的电场为零，$\boldsymbol{E}=0$。不然的话，导体内的自由电荷将受到电场力的作用而移动，就不属静电问题的范围。第二，静电场中导体必为一等位体，导体表面必为等位面，因为导体中 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi=0$。第三，导体表面上的 $\boldsymbol{E}$ 必定垂直于表面。第四，导体如带电，则电荷只能分布于其表面。

总之，静电场中导体的特点是：在导体表面形成一定的面积电荷分布，使导体内的电场为零，每个导体都成为等位体，其表面为等位面。

1.2.2 静电场中的电介质

与导体不同，电介质的特点是其中的电子被原子核所束缚而不能自由运动，称为束缚电荷。但在外加电场的作用下，电介质分子中的正负电荷可以有微小的移动，但不能离开分子的范围，其作用中心不再重合，形成一个个小的电偶极子，如图 1－12 所示，这种现象称为介质极化。极化的结果，使在电介质内部出现连续的电偶极子分布。这些电偶极子形成附加电场，从而引起原来电场分布的变化。

极化的电介质可视为体分布的电偶极子，因此引起的附加电场可视为这些电偶极子的电场的叠加。在介质中取一足够小的体积元 $\Delta V'$，如图 1－13 所示，设它到场点 $\boldsymbol{P}$ 的矢径为 $\boldsymbol{R}$，它的总电偶极矩是其中所有电偶极子的电偶极矩的矢量和，用 $\Sigma\boldsymbol{p}$ 表示，则由(1－22)式得体积元 $\Delta V'$ 所产生的电位为

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r})=\frac{\sum\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}$$

引入

$$\boldsymbol{P}=\frac{\sum\boldsymbol{p}}{\Delta V'}\tag{1-26}$$

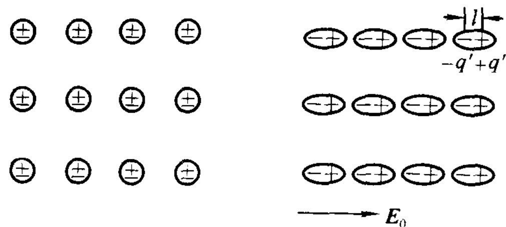


图 1－12　电介质的极化

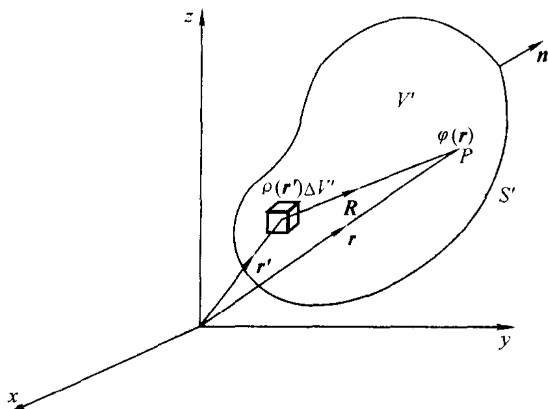


图 1-13 电介质极化建立的电位

则前一式可写为
$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\Delta V'$$

整个极化电介质所产生的电位为
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V' \tag{1-27}$$

上式应对电介质所在的体积进行积分。

由于$\frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}=\nabla'\frac{1}{R}=-\nabla\frac{1}{R}$，因此(1-27)式可以改写成
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

再由矢量恒等式 $\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}}{R}\right)=\frac{1}{R}(\nabla'\cdot\boldsymbol{P})+\boldsymbol{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$，则上式变为
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{V'}\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}}{R}\right)\mathrm{d}V' - \int_{V'}\frac{1}{R}\nabla'\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V'\right] \tag{1-28}$$

对上式应用散度定理，得
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{e}_\mathrm{n}}{R}\mathrm{d}S' \tag{1-29}$$

把(1-29)式与体积电荷及面积电荷的电位积分式(1-21)对比，它可以写成
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_P(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S'}\frac{\sigma_P(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}S' \tag{1-30}$$

也就是说，由极化电介质所产生的电位，等于电荷面密度为 σ_P 的面积电荷与电荷体密度为 ρ_P 的体积电荷共同产生的电位，即
$$\sigma_P = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_\mathrm{n} \tag{1-31}$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{1-32}$$

把 σ_P 称为电介质表面上的极化面积电荷的面密度，ρ_P 称为电介质内的极化电荷体密度。这两部分极化电荷的总和

$$(q_P)_t = \int_V -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \mathrm{d}V + \oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

应等于零，符合电荷守恒原理。

(1－26)式定义的 $\boldsymbol{P}$ 称为电介质的电极化强度，单位为 C/m^2（库/米^2）。它从宏观上定量地描述了电介质极化的程度，是极化后形成的每单位体积内的电偶极矩。实验表明，在各向同性的线性电介质中，电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比，即

$$\boldsymbol{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{1-33}$$

χ 称为电介质的电极化率。

综上所述，电介质对电场的影响，可归结为极化后极化电荷或电偶极子在真空中所产生的作用。也就是说，电介质极化所产生的电位可由极化电荷观点得出的(1－30)式或者由电偶极子观点得出的(1－27)式来计算，但实际上 $\boldsymbol{P}$ 一般事先是未知的，因而常难以具体计算。下面将引入电通[量]密度 $\boldsymbol{D}$，来分析有电介质存在时的静电场。

1.2.3 高斯定律

根据库仑定律和叠加原理可得出以下重要事实：在无限大真空静电场中的任意闭合曲面 S 上，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的面积分等于曲面内的总电荷 $q = \int_V \rho \mathrm{d}V$ 的 $\frac{1}{\varepsilon_0}$ 倍（V 是 S 限定的体积），而与曲面外电荷无关。其数学表示式为

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1-34}$$

称之为真空中静电场的高斯定律。

当有电介质存在时，电场可看成是由自由电荷和极化电荷共同在真空中引起的，真空中静电场的高斯定律仍适用，只是总电荷不仅包括自由电荷 q，而且包括极化电荷 q_P，即

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\int_V \rho \mathrm{d}V + q_P}{\varepsilon_0} = \frac{q + q_P}{\varepsilon_0} \tag{1-35}$$

式中 q 与 q_P 分别为闭合面 S 内的总自由电荷和总极化电荷。由(1－32)式，得

$$q_P = \int_V \rho_P \mathrm{d}V = \int_V -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

代入(1－35)式得 $\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V - \frac{1}{\varepsilon_0}\oint \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

所以

$$\oint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

为简化上面的方程，引入一新的物理量，令

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{1-36}$$

称 $\boldsymbol{D}$ 为电通[量]密度，也称电位移，单位是 $\mathrm{C/m^2}$ (库/米^2)。于是，得

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1-37}$$

这是一般形式的高斯定律。它指出不管在真空中还是在电介质中，任意闭曲面 S 上电通密度 $\boldsymbol{D}$ 的面积分，等于该曲面内的总自由电荷，而与一切极化电荷及曲面外的自由电荷无关。与(1-35)式相比，可以看到，引入 $\boldsymbol{D}$ 后，在方程的右端只出现自由电荷，因为由极化而产生的极化电荷的效果已包括在 $\boldsymbol{P}$ 中，所以也就包括在 $\boldsymbol{D}$ 中了，这样大大有利于电介质中电场的分析和计算。

应用高斯散度定理于(1-37)式，则得

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

因此，有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-38}$$

这是高斯定律的微分形式。它表明静电场中任一点上电通密度 $\boldsymbol{D}$ 的散度等于该点的自由电荷体密度。

(1-36)式称为电介质的构成方程。对于各向同性的电介质，将(1-33)式代入，得

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E}$$

引入

$$\varepsilon = (1 + \chi) \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{1-39}$$

则

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} \tag{1-40}$$

此式称为各向同性电介质的构成方程。ε 称为电介质的介电常数，单位是F/m；而 $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ 称为相对介电常数，无量纲。

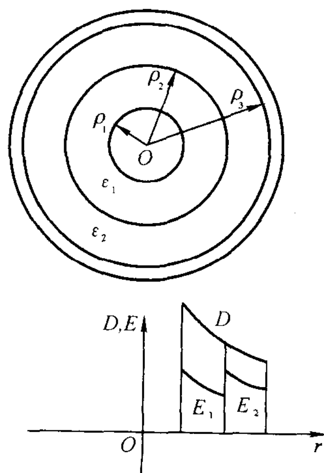


图 1-14 单心电缆的截面

1.2.4 用高斯定律计算静电场

高斯定律反映了静电场的一个基本性质。在场的分布具有某种对称性(常见的有面对称、柱对称和球对称)情况下，应用它来求解电场是很直接的。

例 1-7 单心电缆的尺寸见图 1-14。设它有两层绝缘体，分界面亦是同轴圆柱面。已知内

导体与外壳导体之间的电压为 U。求电场分布。

解：在绝缘体中取任意点 P，设它至 O 点的距离为 ρ。过 P 点作同轴圆柱面，高为 l。该面再加上下两底面作为“高斯面 S”。由于对称，显然 $\boldsymbol{D}$ 在上下底面上没有法向分量，在同轴圆柱面上 $\boldsymbol{D}$ 是均匀的并且沿半径向外取向。应用高斯定律得

$$\int_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (2\pi\rho l)D = \tau l$$

于是各层绝缘体中电场强度分别为

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1\rho} \quad 和 \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2\rho}$$

而电压

$$U = \int_{\rho_1}^{\rho_2} E_1 \mathrm{d}\rho + \int_{\rho_2}^{\rho_3} E_2 \mathrm{d}\rho = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}$$

于是

$$\tau = \frac{2\pi U}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}}$$

故

$$E_1 = \frac{U}{\rho\left(\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right)} \quad 和 \quad E_2 = \frac{U}{\rho\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}\right)}$$

在 $\rho = \rho_1$ 处 E_1 最大，在 $\rho = \rho_2$ 处 E_2 最大，如图 1－14 所示。选择 $\varepsilon_1\rho_1 = \varepsilon_2\rho_2$ 时，这两个最大值相等，且等于

$$E_{\max} = \frac{U}{\rho_1\ln\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \rho_2\ln\dfrac{\rho_3}{\rho_2}}$$

这要比单层绝缘时的最大值 $E'_{\max}$ 为小。这里

$$E'_{\max} = \frac{U}{\rho_1\ln\dfrac{\rho_3}{\rho_1}}$$

这是多层绝缘的一个优点。

例 1－8 真空中有电荷以体密度 ρ 均匀分布于一半径为 a 的球中。试求球内、外的电场强度及电位。

解：(1) 先求电场强度。由于电场的球对称性，在与带电球同心、半径为 r 的球面上，D 是常数，方向是径向的。根据(1－37)式，

当 $r < a$ 时，有

$$4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

所以

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho r}{3}\boldsymbol{e}_r \quad 和 \quad \boldsymbol{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r$$

当 $r > a$ 时，有

$$4\pi r^2 D = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

所以

$$\boldsymbol{D} = \frac{\rho a^3}{3r^2}\boldsymbol{e}_r \quad 和 \quad E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r$$

(2) 求电位。因电荷分布在有限区域，故可选无穷远为电位参考点。

当 $r \leqslant a$ 时

$$\varphi = \int_r^a E\mathrm{d}r + \int_a^\infty E\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

当 $r \geqslant a$ 时

$$\varphi = \int_r^\infty E\mathrm{d}r = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

必须注意，上述用高斯定律计算静电场的方法是有局限性的。

习　题　(1－2)

1－2－1　一点电荷 q 放在无界均匀介质中的一个球形空腔中心，设介质的介电常数为 ε，空腔的半径为 a，求空腔表面的极化电荷面密度。

1－2－2　求下列情况下，真空中带电面之间的电压：

(1) 相距为 a 的两无限大平行板，电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$；

(2) 无限长同轴圆柱面，半径分别为 a 和 b $(b > a)$，每单位长度上电荷：内柱为 τ 而外柱为 $-\tau$；

(3) 半径分别为 R_1 和 R_2 的两同心球面 $(R_2 > R_1)$，带有均匀分布的面积电荷，内外球面电荷总量分别为 q 和 $-q$。

1－2－3　高压同轴线的最佳尺寸设计——一高压同轴圆柱电缆，外导体的内半径为 2 cm，内外导体间电介质的击穿场强为 200 kV/cm。内导体的半径 a，其值可以自由选定但有一最佳值。因为若 a 太大，内外导体的间隙就变得很小，以致在给定的电压下，最大的 E 会超过电介质的击穿场强。另一方面，由于 E 的最大值 E_m 总是在内导体表面上，当 a 很小时，其表面的 E 必定很大。试问 a 为何值时，该电缆能承受最大电压？并求此最大电压值？

（击穿场强：当电场增大达到某一数值时，使得电介质中的束缚电荷能够脱离它们的分子而自由移动，这时电介质就丧失了它的绝缘性能，称为被击穿。某种材料能安全地承受的最大电场强度就称为该材料的击穿场强）。

§ 1－3　静电场基本方程·分界面上的衔接条件

静电场是无旋场。同时，静电场又是一个有散场，静止电荷就是静电场的

(散度)源。静电场的这些特性都可概括在本节介绍的静电场的基本方程之中。另外，在静电问题中，经常遇到不同媒质(真空、电介质、导体等)的分界面，通常在这些分界面上场量有突变的情形。本节在静电场积分形式的基本方程基础上，研究无限接近分界面两侧处的场量间的关系，导出分界面上的衔接条件。

1.3.1　静电场基本方程

前面两节中已得到以下两组基本方程

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \rho dV \tag{1-41}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \tag{1-42}$$

和

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-43}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1-44}$$

且有构成方程

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \text{（在各向同性的线性电介质中）} \tag{1-45}$$

(1－41)式和(1－42)式都是用积分形式来表达的，称为积分形式的静电场基本方程；(1－43)式和(1－44)式则称为微分形式的静电场基本方程。

高斯定律的积分形式(1－41)式说明，电通[量]密度 $\boldsymbol{D}$ 的闭合面积分等于面内所包围的总自由电荷，它表征静电场的一个基本性质。静电场的环路特性(1－42)式说明，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的环路线积分恒等于零，即静电场是一个守恒场。虽然(1－42)式是根据真空中的电场得到，但在有电介质存在时，它依然成立。这是因为有介质存在时，可以用极化电荷来考虑其附加作用。就产生电场这一点，极化电荷与自由电荷一样，遵守库仑的平方反比定律，引起的静电场都属于守恒场。高斯定律的微分形式(1－43)式表明，静电场是有散场。(1－44)式是静电场环路特性的微分形式，它表明静电场是无旋场。从物理概念上来说，积分形式描述的是每一条回路和每一个闭合面上场量的整体情况；微分形式则描述了各点及其邻域的场量情况，也即反映了从一点到另一点场量的变化，从而可以更深刻更精细地了解场的分布。从数学角度来说，微分形式便于进行分析和计算。

例 1－9　在真空中设半径为 a 的球内分布着电荷体密度为 $\rho(r)$ 的电荷。已知球内场强 $\boldsymbol{E} = (r^3 + Ar^2)\boldsymbol{e}_r$，式中 A 为常数，求 $\rho(r)$ 及球外的电场强度。

解：如采用球坐标系，则电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，与 θ、ϕ 无关，故

$$\rho = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \varepsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \varepsilon_0 (5r^2 + 4Ar)$$

因球内电荷分布具有球对称性，故球外电场必定也是球对称的，因此，可得

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_0\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E$$

而球内总电荷为

$$\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_0^a \rho 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\varepsilon_0 (a^5 + Aa^4)$$

由高斯定律，可得

$$\boldsymbol{E} = \frac{a^5 + Aa^4}{r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad (r \geqslant a)$$

1.3.2 分界面上的衔接条件

在静电场中，空间往往分区域分布着两种或多种媒质(导体和电介质)。对于两种互相密接的媒质，分界面两侧的静电场之间存在着一定关系，称为静电场中不同媒质分界面上的衔接条件。它反映了从一种媒质过渡到另一种媒质时分界面上电场的变化规律。

一般而言，由于分界面两侧的物性发生突变，经过分界面时，场量也可能随之突变，故静电场基本方程的微分形式不适用于此，必须回到积分形式的基本方程(1-41)式和(1-42)式。先分析电通[量]密度 $\boldsymbol{D}$ 在两种电介质分界面上必须满足的条件。取分界面上 P 点作为观察点，围绕 P 点邻域作一小扁圆柱体，它的高度为 Δl，$\Delta l \to 0$，但保持两个端面 ΔS 在分界面的两侧，如图 1-15 (a)所示。应用(1-41)式于此小扁圆柱体，有

$$-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S$$

或

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \qquad (1-46)$$

其中 σ 是分界面上分布的自由电荷面密度。上式说明，分界面两侧的电通[量]密度 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量不连续，其不连续量就等于分界面上的自由电荷面密度。

下一步讨论电场强度 $\boldsymbol{E}$ 必须满足的条件。仍取 P 点为观察点。应用(1-42)式于包围 P 点的狭小矩形环路(它与分界面垂直的边长 $\Delta l_2 \to 0$，如图 1-15 (b)所示)，有

$$E_{1t}\Delta l_1 - E_{2t}\Delta l_2 = 0$$

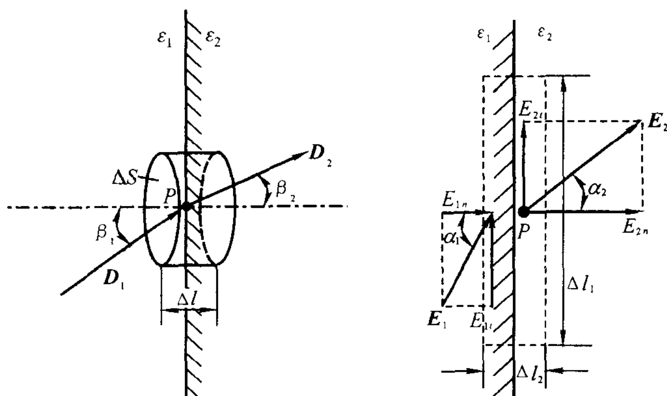
或

$$E_{1t} = E_{2t} \qquad (1-47)$$

即分界面两侧电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切线分量连续。

(1-46)式和(1-47)式称为静电场中分界面上的衔接条件。

设两种电介质皆为线性且各向同性，介电常数分别为 ε_1 和 ε_2，分界面上自由电荷面密度 $\sigma = 0$，则有 $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_1\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{E}_2$。这样在图 1-15 (a) 和图 1-15 (b) 中，应有 $\alpha_1 = \beta_1$ 和 $\alpha_2 = \beta_2$。这时分界面上的衔接条件可分别写成



(a) 在电介质分界面上应用高斯定律　　(b) 在电介质分界面上应用环路定律

图 1 - 15

$$E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2,\qquad \varepsilon_1E_1\cos\alpha_1 = \varepsilon_2E_2\cos\alpha_2$$

两式相除，得

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{1-48}$$

这就是静电场中的折射定律。它适用于无自由面电荷分布的两种电介质分界面。

例 1 - 10　设 $y = 0$ 平面是两种电介质分界面，在 $y > 0$ 区域内，$\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$；在 $y < 0$ 区域内，$\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$，在此分界面上无自由电荷。已知 $\boldsymbol{E}_2 = (10\boldsymbol{e}_x + 20\boldsymbol{e}_y)$ V/m。求 $\boldsymbol{D}_2$，$\boldsymbol{D}_1$ 及 $\boldsymbol{E}_1$。

解：对于 $\boldsymbol{D}_2$，可以直接得出

$$\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{E}_2 = \varepsilon_0(30\boldsymbol{e}_x + 60\boldsymbol{e}_y)\ \mathrm{C/m^2}$$

根据分界面上的衔接条件

$$D_{1n} = D_{2n} = 60\varepsilon_0,\quad E_{1t} = E_{2t} = 10\ \mathrm{V/m}$$

再利用构成方程，可得

$$D_{1t} = \varepsilon_1E_{1t} = 50\varepsilon_0,\quad E_{1n} = D_{1n}/\varepsilon_1 = 12\ \mathrm{V/m}$$

最后，

$$\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_0(50\boldsymbol{e}_x + 60\boldsymbol{e}_y)\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = (10\boldsymbol{e}_x + 12\boldsymbol{e}_y)\ \mathrm{V/m}$$

这一结果示于图 1 - 16 中。

例 1 - 11　图 1 - 17 中(a)和(b)所示都为平行板电容器，已知，d_1，d_2，

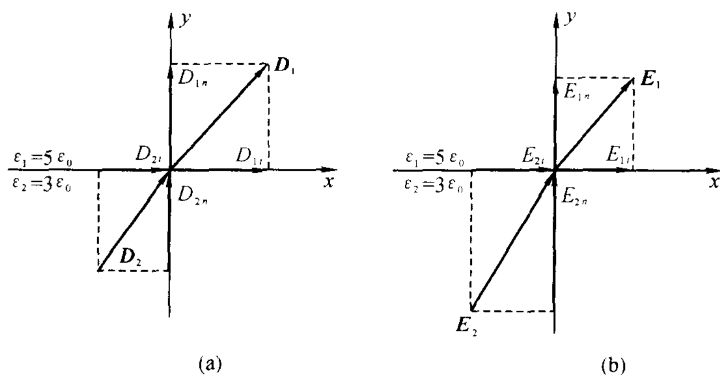


图 1-16 电介质分界面两侧的电场

S_1，S_2，ε_1 和 ε_2。图 1-17 (a)中还已知极板间电压 U_0；图 1-17 (b)中则已知两极板上的总电荷 $\pm q_0$。试分别求其中的电场强度。

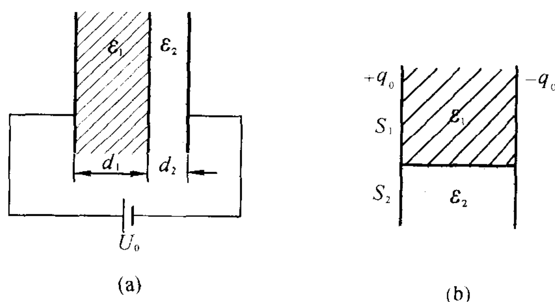


图 1-17 平行板电容器

解：(1) 对图 1-17 (a)所示情况，两种电介质中，D 是相等的，但电场强度不相等，故

$$\begin{cases}\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0\end{cases}$$

解之，所得结果为

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \quad 和 \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U_0}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

(2) 对图 1-17 (b)所示情况，两种电介质中，E 是相等的，但每一极板上的两部分 S_1 和 S_2 上电荷面密度不相等。设它们分别是 σ_1 和 σ_2，则

$$\begin{cases}\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = q_0 \\ \sigma_1/\varepsilon_1 = \sigma_2/\varepsilon_2\end{cases}$$

解得待求的电场强度

$$E=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}=\frac{q_0}{\varepsilon_1 S_1+\varepsilon_2 S_2}$$

这里，讨论用电位函数表示的两种媒质分界面上的衔接条件。在分界面两侧各取一点 A 和 B，其电位分别为 φ_1 和 φ_2，其间距离为 d，则分界面两侧的电位差为

$$\varphi_2-\varphi_1=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=E_n d$$

令 $d\to 0$，并保持 A、B 在界面两侧，若分界面上 E_n 不为无穷大，则

$$\varphi_2-\varphi_1=0 \tag{1-49}$$

即分界面两侧电位是连续的，这与 $E_{1t}=E_{2t}$ 是等效的。另外，应用

$$D_{\mathrm{n}}=\varepsilon E_n=-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

由 $D_{2n}-D_{1n}=\sigma$，得

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma \tag{1-50}$$

(1－49)式和(1－50)式就是用电位函数表示的分界面上的衔接条件。

相应地，对于导体与电介质的分界面，衔接条件也可以用电位函数表示成

$$\varphi_1=\varphi_2=\text{常数} \tag{1-51}$$

$$\sigma=-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \tag{1-52}$$

式中，第一种媒质为导体，n 为法线方向，且由导体指向电介质。

习　题　(1－3)

1－3－1　从静电场基本方程出发，证明当电介质均匀时，极化电荷密度 ρ_P 存在的条件是自由电荷的体密度 ρ 不为零，且有关系式 $\rho_P=-(1-\varepsilon_0/\varepsilon)\rho$。

1－3－2　试证明不均匀电介质在没有自由电荷体密度时可能有极化电荷体密度，并导出极化电荷体密度 ρ_P 的表示式。

1－3－3　两种介质分界面为平面，已知 $\varepsilon_1=4\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=2\varepsilon_0$，且分界面一侧的电场 $E_1=100$ V/m，其方向与分界面的法线成 45° 角，求分界面另一侧电场 E_2 的值。

§1－4　静电场边值问题·唯一性定理

前面介绍的基于库仑定律与叠加原理的叠加积分或高斯定律计算电场的方法，只能适用于已知的电荷分布十分简单的问题。实际上在电工中经常遇到的是这样一类问题：给定空间某一区域内的电荷分布(可以是零)，同时给定该区

域边界上的电位或电场(即边值,或称边界条件),在这种条件下求解该区域内的电位函数或电场强度分布。这类问题称为静电场的边值问题,前面介绍的分析方法已很难用于它的求解。下面讨论用偏微分方程求解的更一般的方法。

1.4.1 泊松方程和拉普拉斯方程

在高斯定律 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ 中,代入 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ 关系,可得

$$\nabla \cdot \varepsilon(-\nabla\varphi) = \rho$$

对于均匀电介质,ε 为常数,则得

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon \tag{1-53}$$

这就是电位 φ 的泊松方程。在自由电荷体密度 $\rho=0$ 的区域内,(1-53)式变为

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{1-54}$$

这就是电位 φ 的拉普拉斯方程。泊松方程和拉普拉斯方程表达了场中各点电位的空间变化与该点自由电荷体密度之间的普遍关系,是电位函数应当满足的微分方程。所有静电场问题的求解都可归结为在一定条件下寻求泊松方程或拉普拉斯方程的解的过程。

1.4.2 静电场边值问题

寻求泊松方程或拉普拉斯方程的解答是一个积分过程,在所得的通解中,必然出现一些未确定的常数,这说明只由泊松方程或拉普拉斯方程不能唯一地确定静电场的解,还必须利用静电场的边界条件及电位的性质来确定通解中的常数。也就是说,静电问题变为求满足给定边界条件的泊松方程或拉普拉斯方程的解的问题,称之为静电场的边值问题。

在场域的边界面 S 上给定边界条件的方式有以下几种类型:

(1) 已知场域边界面 S 上各点的电位值,即给定

$$\varphi|_S = f_1(s) \tag{1-55}$$

称为第一类边界条件。这类问题称为第一类边值问题。

(2) 已知场域边界面 S 上各点的电位法向导数值,即给定

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = f_2(s) \tag{1-56}$$

称为第二类边界条件。这类问题称为第二类边值问题。

(3) 已知场域边界面 S 上各点电位和电位法向导数的线性组合的值,即给定

$$\left.\left(\varphi + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\right|_S = f_3(s) \tag{1-57}$$

称为第三类边界条件。这类问题称为第三类边值问题。

因此，静电场边值问题就是在给定第一类、第二类或第三类边界条件下，求电位函数 φ 的泊松方程或拉普拉斯方程定解的问题。

如果场域伸展到无限远处，则必须提出所谓无限远处的边界条件。对于电荷分布在有限区域的情况，则在无限远处电位为有限值，即

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi = \text{有限值} \tag{1-58}$$

称为自然边界条件。

另外，当边值问题所定义的整个场域中电介质并不是完全均匀的，但能分成几个均匀的电介质子区域时，按各电介质子区域分别写出泊松方程或拉普拉斯方程。作为定解条件，还必须相应地引入不同媒质分界面上的衔接条件。

例 1－12 图 1－18 示长直同轴电缆截面。已知缆芯截面是一边长为 $2b$ 的正方形，铅皮半径为 a，中间电介质的介电常数是 ε，且在两导体间接以电压为 U_0 的电源。试写出该电缆中静电场的边值问题。

解：如果把电缆理想化为无限长的情况，则电位 φ 仅随 x 和 y 坐标变化，且满足拉普拉斯方程。由于电场分布具有对 x 轴和 y 轴对称的特点，故对称轴分别与相应的电力线相重合，因此计算场域只需取如图 1－18 中阴影所示的 $\frac{1}{4}$ 区域。据此，待求静电场的边值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (\text{图中阴影所示的区域}) \\ \varphi\big|_{(x=b,0\leqslant y\leqslant b)\text{及}(y=b,0\leqslant x\leqslant b)} = U_0 \\ \varphi\big|_{(x^2+y^2=a^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{(x=0,b<y<a)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{(y=0,b<x<a)} = 0 \end{cases}$$

例 1－13 图 1－19 所示平板空气电容器(板的尺度远大于板间距离)中，有体密度为 ρ 的电荷均匀分布，已知两板间电压值为 U_0。忽略边缘效应，求电场的分布。

解：为简化问题，视平行板为无限大平板的情况，则电位 φ 仅为 x 坐标的函数。这样，泊松方程就简化成

$$\nabla^2\varphi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

积分后，得通解为

$$\varphi = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + Bx + C$$

应用给定的边界条件：$x = 0, \varphi = 0; x = d, \varphi = U_0$，故

$$\begin{cases} 0 = C \\ U_0 = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d^2 + Bd + C, \end{cases} \qquad B = \frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d$$

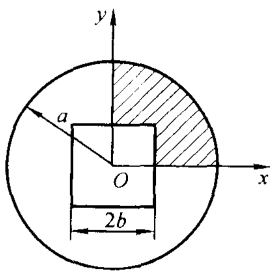


图 1-18 外圆内方同轴电缆

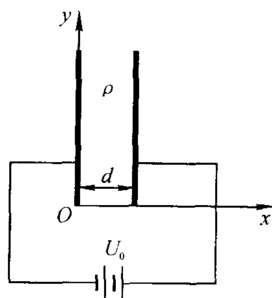


图 1-19 平板空气电容器

从而有

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d\right)x$$

电场强度

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{e}_x = \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}x - \frac{U_0}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\boldsymbol{e}_x$$

例 1-14 设有电荷均匀分布在半径为 a 的球形区域中，电荷体密度为 ρ。试求此球体电荷的电位及电场。

解：球内电位应满足泊松方程 $\nabla^2\varphi_1 = -\rho/\varepsilon_0$，而球外电位则应满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi_2 = 0$。选用球坐标系，球心与原点重合。由对称性可知，电位 φ 仅为坐标 r 的函数，故

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad 0 \leqslant r < a$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \qquad a < r$$

积分之，得通解为

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - C_1\frac{1}{r} + C_2$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4$$

下面来确定积分常数：

因 $r \to 0$ 时，电位应为有限值，故 $C_1 = 0$；$r \to \infty$ 时，$\varphi_2(\infty) = 0$，故 $C_4 = 0$。

当 $r = a$ 时，$\varphi_1 = \varphi_2$，故 $-\dfrac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + C_2 = -\dfrac{C_3}{a}$；

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a}, \quad 故 \quad \frac{C_3}{a^2} = -\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$$

解得

$$C_3 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}, C_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

从而

$$\varphi_1(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2) \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} \qquad (a \leqslant r)$$

电场强度

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_r & (0 \leqslant r \leqslant a) \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_r & (a \leqslant r) \end{cases}$$

1.4.3 唯一性定理

一般说来，常难以通过泊松方程或拉普拉斯方程定解问题的直接积分求得静电场问题圆满的结果。因此，对于某些问题，人们就寻求间接的方法。这就产生一个问题，用这种或那种方法得到的解答是不是正确的。这便是唯一性定理要回答的问题。

静电场的唯一性定理表明，凡满足下述条件的电位函数 φ，是给定静电场的唯一解：

(1) 在场域 V 中满足电位微分方程 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$（或 $\nabla^2 \varphi = 0$）。对于分区均匀的场域 V，应满足每个分区场域中的方程；

(2) 在不同介质的分界面上，符合分界面上的衔接条件；

(3) 在场域边界面 S 上，满足给定的边界条件。

上列各项可简述为：在静电场中凡满足电位微分方程和给定边界条件的解 φ，是给定静电场的唯一解，称为静电场的唯一性定理。

现在用“反证法”来证明唯一性定理。设有两个电位函数 φ' 和 φ'' 在场域 V 中满足泊松方程 $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon$，则差值 $u = \varphi' - \varphi''$ 必满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = \nabla^2 \varphi' - \nabla^2 \varphi'' = -\frac{\rho}{\varepsilon} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$$

由上式及高斯散度定理得

$$\oint_S u \nabla u \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot (u \nabla u) \mathrm{d}V = \int_V [u \nabla^2 u + (\nabla u)^2] \mathrm{d}V = \int_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V$$

或写成

$$\oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = \int_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V \tag{1-59}$$

若已知第一类边界条件，则在全部边界面 S 上 $\varphi' = \varphi'' = \varphi|_S$，故 $u|_S = 0$；若已知第二类边界条件，则在全部边界面 S 上，$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi''}{\partial n} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S$，故 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$。这样无论是第一类还是第二类边界条件，都将由(1-59)式得到

$$\int_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = 0$$

因 $(\nabla u)^2$ 不为负值，所以要使上式成立，必在 V 内处处有 $\nabla u = \nabla(\varphi' - \varphi'') = 0$，或 $\varphi' - \varphi'' = C$（任意常数）。对于第一类边值问题，因在边界面上 $\varphi' = \varphi'' = \varphi|_S$，可解得 $C = 0$；对于第二类边值问题，若 φ' 与 φ'' 取同一参考点，则在参考点处 $\varphi' - \varphi'' = 0$，则常数 C 也为零。由以上分析可见，在场域 V 中各处，恒有 $u = 0$，即 $\varphi' = \varphi''$。也就是说，有两个不同的解都满足微分方程和给定边界条件的假设是不能成立的。唯一性定理得证。

唯一性定理对求静电问题的解具有十分重要的意义，它指出了静电场具有唯一解的充要条件，且可用来判定得到的解的正确性。据此，可以尝试任何一种能找到的最方便的方法求解某一问题，只要这个解满足所有给定条件，那么这个解就是正确的，任何另一种方法求得的同一问题的解必然是与它完全相同的。针对不同情况，人们已找到了多种求解静电问题的方法，如镜像法和电轴法、分离变量法等。

习　题　(1-4)

1-4-1　电荷按 $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$ 的规律分布于 $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ 的球壳层中，其中 α 为常数，试由泊松方程直接积分求电位分布。

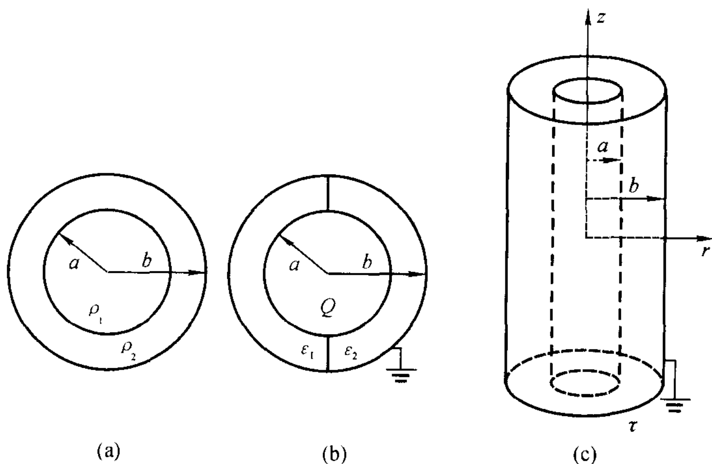
1-4-2　两平行导体平板，相距为 d，板的尺寸远大于 d，一板电位为零，另一板电位为 V_0，两板间充满电荷，电荷体密度与距离成正比，即 $\rho(x) = \rho_0 x$。试求两板间的电位分布（注：$x=0$ 处板的电位为零）。

1-4-3　写出下列静电场的边值问题:

(1) 电荷体密度分别为 ρ_1 和 ρ_2,半径分别为 a 与 b 的双层同心带电球体(如题 1-4-3 图(a));

(2) 在两同心导体球壳间，左半部和右半部分别填充介电常数为 ε_1 与 ε_2 的均匀介质，内球壳带总电荷量为 Q, 外球壳接地(如题 1-4-3 图(b));

(3) 半径分别为 a 与 b 的两无限长空心同轴圆柱面导体,内圆柱表面上单位长度的电量为 τ，外圆柱面导体接地(如题 1-4-3 图(c))。



题 1-4-3 图

§1-5　分离变量法

在上节中已经提到，静电场问题都可归结为求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题。不过前面所举的一些例子都是一维问题(即 φ 仅为一个坐标的函数)，因此泊松方程或拉普拉斯方程就化为一个二阶常微分方程，进行直接积分就能求出解答。然而，实际遇到的问题大多都是二维的或三维的(即 φ 为两个或三个坐标的函数)，进行直接积分变得不可能，因此需要寻求其它求解方法。当场域的边界面能与某正交坐标系的坐标面相重合时，分离变量法将是一种有效的求解方法。它也是解边值问题的一种最基本和最经典的方法。

分离变量法的基本思想是：把电位函数 φ 用两个或三个仅含一个坐标变量的函数的乘积表示，代入偏微分方程后，借助“分离”常数使原来的偏微分方程转化为几个常微分方程，然后分别求解这些常微分方程并以给定的边界条件确定其中待定常数和函数，最终得到电位函数解。所得的解往往具有傅里叶级数形式，因此又称傅里叶法。

本节将介绍在直角坐标系和圆柱坐标系中，解拉普拉斯方程的分离变量法。

1.5.1 直角坐标系中的分离变量法

这里仅讨论二维直角坐标系中拉普拉斯方程的分离变量法。设电位分布只是 x 和 y 的函数,沿 z 方向没有变化，则拉普拉斯方程是

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{1-60}$$

首先，给出分离变量形式的试探解，即假设解答为

$$\varphi(x,y)=X(x)Y(y) \tag{1-61}$$

式中 X 仅为 x 的函数,Y 仅为 y 的函数。将(1-61)式代入(1-60)式，并用 X、Y 除以方程式的两边，便得

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} \tag{1-62}$$

上式左边与 y 无关,右边与 x 无关,而在 x、y 取任意值时它们又恒等。显然，这只能在两边均等于一常数时才可能，将此常数写成 k_n^2，得

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}-k_n^2X=0 \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}+k_n^2Y=0 \tag{1-63}$$

这样就把二维的拉普拉斯方程分离成两个常微分方程。k_n 称为分离常数。

当 $k_n=0$ 时，上面两个常微分方程的解分别为

$$X(x)=A_0x+B_0 \quad 和 \quad Y(y)=C_0y+D_0$$

而当 $k_n\neq0$ 时，则解分别为

$$X(x)=A_n\,\mathrm{ch}k_nx+B_n\mathrm{sh}k_nx \quad 和 \quad Y(y)=C_n\cos k_ny+D_n\sin k_ny$$

其中 A_0、B_0、C_0、D_0、A_n、B_n、C_n 和 D_n 都是待定常数。

因拉普拉斯方程是线性的，适用叠加原理，k_n 取所有可能值的解的线性组合也将是它的解，所以由(1-61)式得到电位函数的一般解是

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=&(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\mathrm{ch}k_nx+B_n\mathrm{sh}k_nx)(C_n\cos k_ny+D_n\sin k_ny)\end{aligned} \tag{1-64}$$

解答(1-64)式是 y 的周期函数,x 的双曲函数;若把(1-63)式中 k_n^2 换为 $-k_n^2$，则 φ 是 x 的周期函数,y 的双曲函数。因此，可得到另外一个一般解，即

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=&(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos k_nx+B_n\sin k_nx)(C_n\mathrm{ch}k_ny+D_n\mathrm{sh}k_ny)\end{aligned} \tag{1-65}$$

究竟如何选取分离常数，要由给定问题的具体边界条件情况而定。各待定的常

数 A_n、B_n、C_n 和 D_n 也按照给定的边界条件确定，即可获得唯一的答案。

例 1-15 无限长接地金属槽内的电场。

如图 1-20 所示，有一无限长直角金属槽，其三壁接地，另一壁与三壁绝缘且保持电位为 V_0，金属槽截面的长宽分别为 a 与 b。求此金属槽内的电位分布。

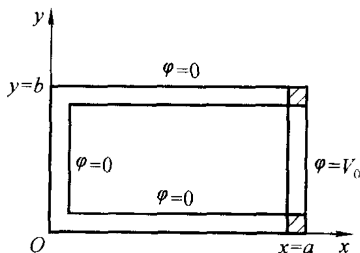


图 1-20 接地金属槽的截面

解：因金属槽无限长，故槽内电位 φ 与坐标 z 无关。由于槽内各点上电荷密度 $\rho=0$，故槽内电位函数满足二维直角坐标系中的拉普拉斯方程，根据给定的边界条件，$\varphi(x,y)$ 的通解应取为(1-64)式。我们将给定的边界条件代入一般解中，逐步决定其中的常数。

(1) 在 $x=0$ 处，$\varphi=0$ 故

$$B_0(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(C_n\cos k_ny+D_n\sin k_ny)=0$$

上式对于任意 y 值均成立，必有 $B_0=0$，$A_n=0$

(2) 在 $y=0$ 处，$\varphi=0$，故得 $D_0=0$，$C_n=0$。

(3) 在 $y=b$ 处，$\varphi=0$，故得 $A_0=0$，$C_0=0$，$\sin k_nb=0$，$k_n=\frac{n\pi}{b}$。将以上所得各常数代入(1-64)式，即得电位 $\varphi(x,y)$ 的解

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_nD_n\text{sh}\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}。$$

(4) 在 $x=a$ 处，$\varphi=V_0$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_nD_n\text{sh}\frac{n\pi a}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}=V_0$$

上式两边同乘以 $\sin\frac{m\pi y}{b}$，然后从 $0\to b$ 进行积分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^b B_nD_n\text{sh}\frac{n\pi a}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\text{d}y=\int_0^b V_0\sin\frac{m\pi y}{b}\text{d}y$$

根据三角函数的正交性，得

$$B_nD_n\text{sh}\frac{n\pi a}{b}=\begin{cases}\dfrac{4V_0}{n\pi} & (n\ \text{为奇数})\\ 0 & (n\ \text{为偶数})\end{cases}$$

最终得电位函数 $\varphi(x,y)$ 的解为

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{4V_0}{n\pi}\text{sh}\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}/\text{sh}\frac{n\pi a}{b}$$

1.5.2　圆柱坐标系中的分离变量法

这里，仅介绍在圆柱坐标系中，电位函数 φ 沿 z 方向没有变化时的二维平行平面场。φ 的拉普拉斯方程为

$$\nabla^2\varphi(\rho,\phi)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=0 \qquad (1-66)$$

令待求电位函数 φ 的试探解为 $\varphi(\rho,\phi)=R(\rho)Q(\phi)$，代入上式，经过整理得

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}=-\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}=n^2$$

或

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-n^2R=0$$

及

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}+n^2Q=0$$

当 $n=0$ 时，$R_0(\rho)=A_0\ln\rho+B_0$ 和 $Q_0(\phi)=C_0\phi+D_0$

当 $n\neq0$ 时，$R_n(\rho)=A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}$ 和 $Q_n(\phi)=C_n\cos n\phi+D_n\sin n\phi$

于是，由这些解的相应乘积叠加组成拉普拉斯方程的一般解，即

$$\varphi(\rho,\phi)=(A_0\ln\rho+B_0)(C_0\phi+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n})(C_n\cos n\phi+D_n\sin n\phi) \qquad (1-67)$$

上式中各常数由具体问题的给定边界条件确定。

例 1-16　均匀外电场中的电介质圆柱体。

如图 1-21 所示，在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中，有一半径为 a、介电常数为 ε_2 的无限长均匀介质圆柱体，其轴与 $\boldsymbol{E}_0$ 垂直，柱外充满介电常数为 ε_1 的均匀介质。求柱内与柱外的电位分布。

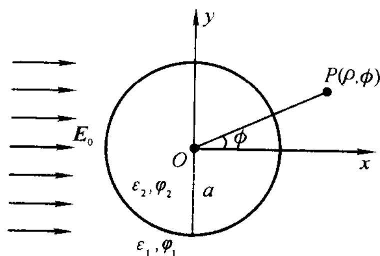


图 1-21　均匀外电场中的介质圆柱体

解：根据界面形状取圆柱坐标系，且使 z 轴与柱轴重合。因圆柱无限长，电位 φ 与坐标 z 无关，故应取(1-67)式为一般解。由于电位 $\varphi(\phi+2K\pi)=\varphi(\phi)$，且具有 $\varphi(\phi)=\varphi(-\phi)$，故一般解不应包含 $\sin n\phi$ 项，及应有 $C_0=0$。所以，本问题的一般解取为

$$\varphi(\rho,\phi) = A_0\ln\rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\rho^n + B_n\rho^{-n})\cos n\phi$$

(1) 设柱外电位为 φ_1,当 $\rho \to \infty$ 时,$\varphi_1 \to -E_0\rho\cos\phi$,比较系数可得:当 $n=1, A_1=-E_0; n\neq 1, A_n=0, A_0=0, B_0=0$。故

$$\varphi_1 = -E_0\rho\cos\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\rho^n}\cos n\phi$$

(2) 设柱内电位为 φ_2,当 $\rho \to 0$ 时,φ_2 为有限值(取为零),故 φ_2 中不可能有 $\ln\rho$ 和 ρ^{-n} 两项,即 $A_0=0$ 和 $B_n=0$,且 $B_0=0$。于是

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\rho^n\cos n\phi$$

(3) 利用柱面上的介质分界面衔接条件，得

$$\begin{cases} -E_0 a\cos\phi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{a^n}\cos n\phi = \sum_{n=1}^{\infty}A_n a^n\cos n\phi \\ \varepsilon_1\left(-E_0\cos\phi - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{B_n}{a^{n+1}}\cos n\phi\right) = \varepsilon_2\sum_{n=1}^{\infty}nA_n a^{n-1}\cos n\phi \end{cases}$$

比较以上两式的两端 $\cos n\phi$ 项的系数,当 $n=1$ 时，得

$$\begin{cases} -E_0 a + \dfrac{B_1}{a} = A_1 a \\ \varepsilon_1\left(-E_0 - \dfrac{B_1}{a^2}\right) = \varepsilon_2 A_1 \end{cases}$$

解之，得

$$A_1 = -\left(1 - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)E_0 \quad 和 \quad B_1 = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}a^2E_0$$

当 $n\neq 1$ 时，$A_n=B_n=0$。因此，求得柱外与柱内的电位为

$$\varphi_1 = -E_0\rho\cos\phi + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{a^2}{\rho}E_0\cos\phi$$

和

$$\varphi_2 = -\left(1 - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)E_0\rho\cos\phi$$

综上所述，分离变量法的具体步骤为:

(1) 按给定场域的形状选择适当的坐标系，使场域的边界面能与坐标面相吻合，并写出静电场边值问题在该坐标系中的表达式。

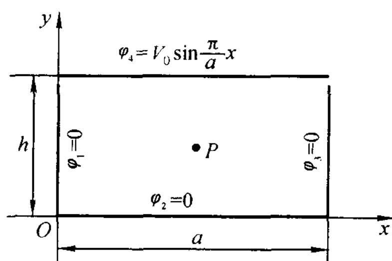
(2) 将偏微分方程通过“分离”变量转化为常微分方程。

(3) 解各常微分方程并组成拉普拉斯方程的通解。通解含有“分离”常数和待定常数。

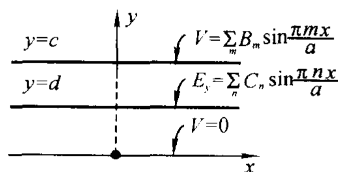
(4) 由边界条件确定“分离”常数和待定常数，得到问题的唯一确定解。

习 题 (1-5)

1-5-1 一长直接地金属槽，其三壁电位为零，顶盖电位为 $V_0\sin\dfrac{\pi x}{a}$，如图所示。求金属槽内的电位分布。



题1-5-1图



题1-5-2图

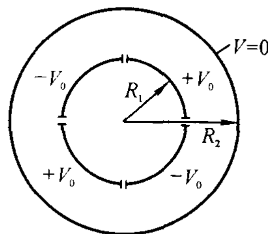
1-5-2 在直角坐标中 $y=0$ 的面是零电位，$y=c$ 的电位是

$$V\equiv\sum_m B_m\sin\frac{\pi mx}{a}$$

若使 $y=d\ (c>d>0)$ 处电场的 y 分量是

$$E_y=\sum_n C_n\sin\frac{\pi nx}{a}$$

问 B_m 的表示式如何？



题1-5-3图

1-5-3 一个半径为 R_1 的四片整流子与一个半径为 $R_2\ (R_2>R_1)$ 的接地圆管同轴，求其间电位的分布。整流片的电位交错为 $\pm V_0$。

1-5*-4 试由例1-16结果说明，若电介质内部有了细长的夹杂物(如空气泡)，而夹杂物的介电常数小于周围介质的介电常数时，该处场强可能显著增强。在某些情况下，将导致放电并促进介质内部的击穿，最终使绝缘损坏。

§1-6 有限差分法

求解静电场边值问题，当场域边界的几何形状比较简单时，其解可以用分离变量法求得。但当边界形状比较复杂时，一般只能求出近似解。本节通过拉普拉斯方程介绍求偏微分方程近似解的一种重要的数值方法——有限差分法。

有限差分法的基本思想是：把场域用网格进行分割，再把拉普拉斯方程用以各网格节点处的电位作为未知数的差分方程式来进行代换，将求拉普拉斯方

程解的问题变为求联立差分方程组的解的问题。

1.6.1　差分格式

如图 1－22 所示，在一由边界 L 界定的二维区域 D 内，电位函数 φ 满足拉普拉斯方程且给定第一类边界条件，即有如下的静电场边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\ (\text{在区域 } D \text{ 内}) & (1-68)\\ \varphi|_L=f(s) & (1-69)\end{cases}$$

应用有限差分法，首先要确定网格节点的分布方式。为简单起见，在图 1－22 中，用分别与 x、y 轴平行的两组直线（网格线）把场域 D 划分成足够多的正方形网格，网格线的交点称为节点，两相邻平行网格线间的距离称为步距 h。

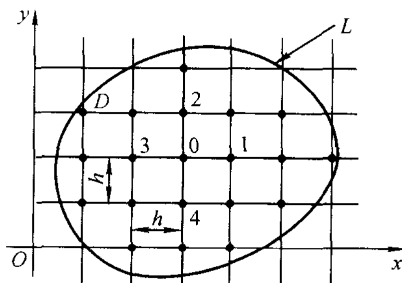


图 1－22　有限差分的网格分割

划分好网格后，需把拉普拉斯方程离散化。为此，将偏导数以有限差商表示。例如，对于图中任一点 0，有一阶偏导数

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=x_0}\approx\frac{\varphi(x_0+h,y_0)-\varphi(x_0-h,y_0)}{2h}=\varphi_x$$

这里 h 是足够小。对于二阶偏导数，有

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}\approx\frac{\varphi_x(x_0+h/2,y_0)-\varphi_x(x_0-h/2,y_0)}{h}$$

$$=\frac{\varphi_1-2\varphi_0+\varphi_3}{h^2}\qquad(1-70)$$

同样，$\left.\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}$ 用有限差商代替后变为

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}=\frac{(\varphi_2-2\varphi_0+\varphi_4)}{h^2}\qquad(1-71)$$

将(1－70)式和(1－71)式代入(1－68)式，得通过差分离散后二维拉普拉斯方程的有限差分近似表达式为

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4-4\varphi_0=0\qquad(1-72)$$

称之为拉普拉斯方程的差分格式，或差分方程。

差分格式说明，在点 (x_0,y_0) 的电位 φ_0 可近似地取为其周围相邻四点电位的平均值。这一关系式对区域内的每一节点都成立。也就是说，对于场域内的每一个节点，都可以列出一个(1－72)式形式的差分方程。但是，对于紧邻边界的节点，其边界不一定正好落在正方形网格的节点上，而可能如图 1－23 所示。

其中1,2为边界线上的节点，p、q为小于1的正数，仿上所述，可推得对这些节点的拉普拉斯方程的差分格式为

$$\frac{\varphi_1}{p(1+p)}+\frac{\varphi_2}{q(1+q)}+\frac{\varphi_3}{1+p}+\frac{\varphi_4}{1+q}-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\varphi_0=0 \tag{1-73}$$

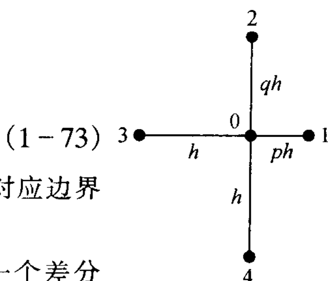


图1-23 紧邻边界节点

式中 φ_1 和 φ_2 分别是给定边界条件函数 $f(s)$ 在对应边界点处的值，是已知的。

由上述知，在场域 D 内的每一个节点都有一个差分方程，通过这些方程把各个内节点的电位以及边界上的节点电位联系起来。只要解这个联立方程组，便可求得各个节点的电位值。

1.6.2 差分方程组的解

在求解实际问题时，由于节点个数很多，联立差分方程的个数往往可达几百甚至几千个，通常的解联立方程的直接方法(如行列式法,消去法等)便不再适用。好在每一个差分方程中只包含很少几项，可以采用逐次近似的迭代方法求解。这里介绍最常用的迭代法：高斯—塞德尔迭代法和逐次超松弛法。

(1) 高斯—塞德尔迭代法

这个方法是，先对节点(x_i,y_j)选取迭代初值$\varphi_{ij}^{(0)}$。其中,上角标(0)表示0次近似值;下角标i,j表示节点所在位置,即第i行第j列的交点。再按

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\varphi_{i-1,j}^{(k+1)}+\varphi_{i,j-1}^{(k+1)}+\varphi_{i+1,j}^{(k)}+\varphi_{i,j+1}^{(k)}\right)\qquad i,j=1,2,\cdots \tag{1-74}$$

反复迭代$(k=0,1,\cdots)$。必须注意,在迭代过程中遇到边界点时,需用(1-69)式中的边界条件$\varphi_{i,j}=f_{i,j}$代入。迭代一直进行到对所有内节点满足条件

$$\left|\varphi_{i,j}^{(k+1)}-\varphi_{i,j}^{(k)}\right|<W \tag{1-75}$$

为止，其中W是预定的最大允许误差。

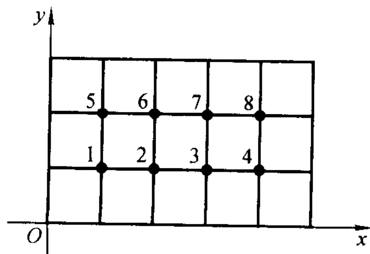


图1-24 网格节点排列

在高斯—塞德尔迭代中，网格节点一般按“自然顺序”排列，即先“从左到右”，再“从下到上”的顺序排列，如图(1-24)所示。迭代也是按自然顺序进行。

(2) 逐次超松弛法

逐次超松弛方法是前者的变形。它在迭代过程中，为了加速收敛，在把所得结果依次代入进行计算的同时，还使用把每次迭代的变化

量加权后再代入的方法。其相应的迭代格式为

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)} = \varphi_{i,j}^{(k)} + \frac{\alpha}{4}\left(\varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)} + \varphi_{i-1,j}^{(k+1)} + \varphi_{i,j-1}^{(k+1)} - 4\varphi_{ij}^{(k)}\right) \tag{1-76}$$

其中 α 是一个供选择的参数，称为“加速收敛因子”，且 $1 \leqslant \alpha < 2$。逐次超松弛法收敛的快慢与加速收敛因子有着明显的关系。实践表明，如果 α 选得好，可以较快地加快迭代的收敛速度。如何选择最佳的加速收敛因子 α_{opt}，这是一个复杂问题。

借助计算机进行计算时，其程序框图如图 1－25 所示。

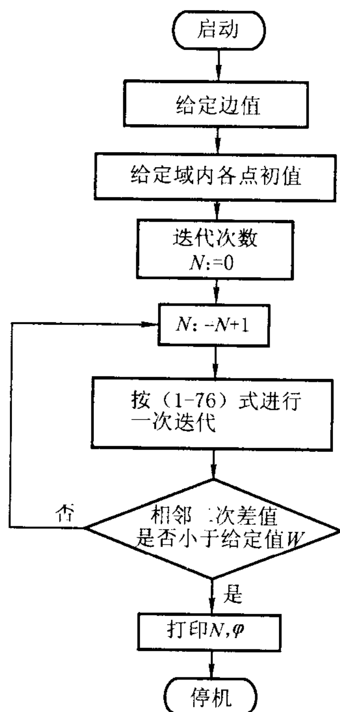


图 1－25 迭代解程序框图

逐次超松弛迭代法是解拉普拉斯方程最有效和应用最广泛的方法之一。

例 1－17 应用有限差分法求静电场边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (0 < x < 20, 0 < y < 10) \\ u(x,0) = u(x,10) = 0 \\ u(0,y) = 0, \quad u(20,y) = 100 \end{cases}$$

的近似解。

解：取 $h=5$ 作正方形网格(图 1-26)得差分方程

$$\begin{cases}4u_1-u_2=0\\4u_2-u_1-u_3=0\\4u_3-u_2=100\end{cases}$$

利用高斯-塞德尔迭代格式

$$\begin{cases}u_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}u_2^{(k)}\\u_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}(u_1^{(k+1)}+u_3^{(k)})\\u_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}u_2^{(k+1)}+25\end{cases}$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

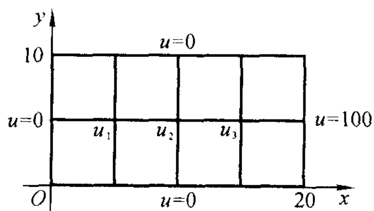


图 1-26 正方形网格($h=5$)

选取迭代初值 $u_1^{(0)}=2, u_2^{(0)}=7.5, u_3^{(0)}=30$，计算得表 1-1。即经过 6 次迭代得解

$$u_1=1.786\quad,u_2=7.143\quad,u_3=26.786$$

若步距 $h=2.5$ (图 1-27) ,迭代初值为 $u_i=0\ (i=1,2,\cdots,21)$,最大允许误差 $W=5\times10^{-5}$，经过 32 次迭代得到解：

表 1-1

k	u_1	u_2	u_3	k	u_1	u_2	u_3
0	2	7.5	30	4	1.789	7.145	26.786
1	1.875	7.969	26.992	5	1.786	7.143	26.786
2	1.992	7.246	26.812	6	1.786	7.143	26.786
3	1.812	7.156	26.789				

$u_1=0.3530,\quad u_2=0.9131,$

$u_3=2.0102,$

$u_4=4.2957,\quad u_5=9.1531,$

$u_6=19.6631,$

$u_7=43.2101,\quad u_8=0.4988,$

$u_9=1.2893,$

$u_{10}=2.8323,\quad u_{11}=6.0193,$

$u_{12}=12.6537,$

$u_{13}=26.2894,\quad u_{14}=53.1774,$

$u_{15}=0.3530,$

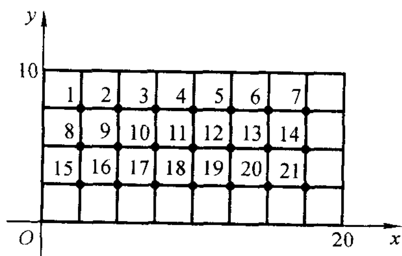


图 1-27 正方形网格($h=2.5$)

$u_{16} = 0.9131$, $u_{17} = 2.0103$,

$u_{18} = 4.2957$,

$u_{19} = 9.1531$, $u_{20} = 19.6632$,

$u_{21} = 43.2101$

如果应用逐次超松弛法，则在给定相同的最大允许误差 W 的条件下，迭代次数与加速收敛因子 α 的关系见表 1-2。

表 1-2 ($h=2.5$)

α	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
迭代次数	32	26	20	16	18	24

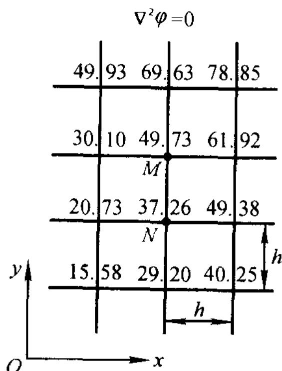
可见，当 $\alpha \approx 1.3$ 时迭代收敛相对最快。

习 题 (1-6)

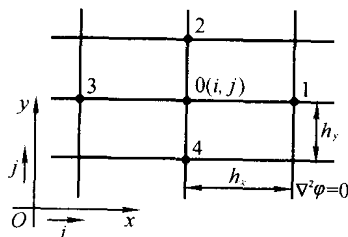
1-6-1 如题 1-5-1 图中顶盖电位为 $10\sin\frac{\pi x}{a}$, $a = 10$ cm, $b = 5$ cm，试用有限差分法求槽内电位分布。

1-6-2 附图中示出一二维拉普拉斯场中的电位函数 φ 的数值解。试验证 M、N 两点用有限差分法所得结果是否满足求解要求(若数值解的绝对误差要求应不大于 0.03)？

1-6-3 如附图所示，给定一二维拉普拉斯场，现用长方形网格予以划分，试求此时与拉普拉斯方程相应的差分格式。



题 1-6-2 图



题 1-6-3 图

§1-7 镜像法和电轴法

这一节将介绍解静电场边值问题的两种特殊方法——镜像法和电轴法，使

某些看来棘手的问题很容易地得到解决。它们是唯一性定理的典型应用之例。镜像法和电轴法的实质是把实际上分片均匀媒质看成是均匀的，并在所研究的场域边界外的适当地点用虚设的较简单的电荷分布来代替实际边界上复杂的电荷分布(即导体表面的感应电荷或介质分界面的极化电荷)。根据唯一性定理，只要虚设的电荷分布与边界内的实际电荷一起所产生的电场能满足给定的边界条件，这个结果就是正确的。

1.7.1 镜像法

镜像法最简单的例子是：接地无限大导体平面上方一个点电荷的电场，见图 1－28 (a)。根据唯一性定理，导体平面上半空间的电位分布应满足如下条件：

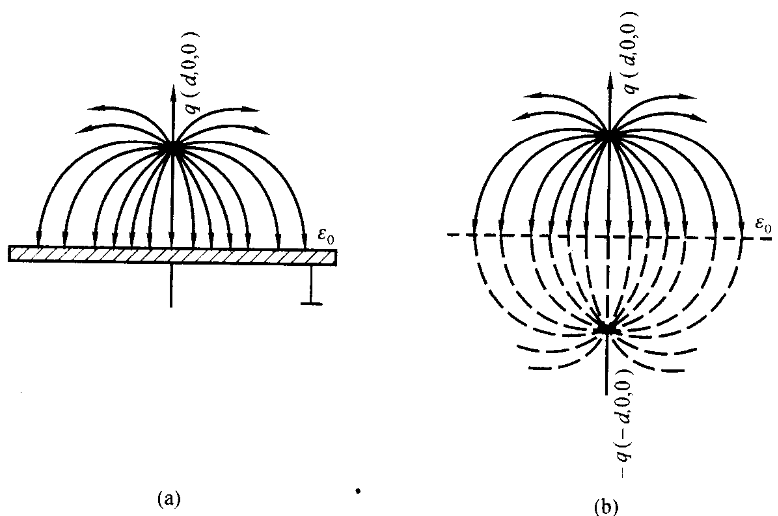


图 1－28 无限大导体平面上方的点电荷

(1) 除点电荷 q 所在处外，空间中 $\nabla^2\varphi = 0$；

(2) 在导体平面及无穷远处边界上，电位均为零。

显然，只要在导体平面的下方与点电荷 q 对称的点$(-d,0,0)$处放置一点电荷$(-q)$，并把无限大导体平板撤去，整个空间充满介电常数为 ε_0 的电介质，则原来电荷 q 和电荷$(-q)$共同在平板上半空间内产生的电位分布满足上述全部条件。故任意点 $P(x,y,z)$ 的电位为

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}} \tag{1-77}$$

这里的 $(-q)$ 相当于 $(+q)$ 对导体板的"镜像"，故称为镜像法，它代替了分布在导体平板表面上的感应电荷的作用。

用镜像法解题时要注意适用区域。这里，解(1-77)式适用区域为导体平面上半空间内。下半空间内实际上不存在电场。

还有几种其它类型的镜像问题。这里先来研究一个导体球面的镜像问题。如图 1-29 所示，在半径为 R 的接地导体球外，距球心为 d 处有一点电荷 q。根据唯一性定理，球外电位函数 φ 应满足如下条件：

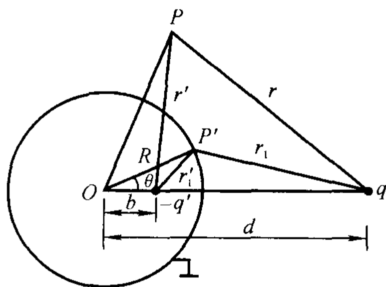


图 1-29　点电荷对导体球的镜像

(1) 除 q 所在处外，空间中 $\nabla^2\varphi = 0$；

(2) 当 $r \to \infty$ 时，$\varphi \to 0$；

(3) 因导体球接地，则在球面上 $\varphi = 0$。

根据问题的对称性，可设镜像电荷 $(-q')$ 放在球心 O 与点电荷 q 的联线上，且距球心为 b。显然，只要 $(-q')$ 放在球内，不论 $(-q')$ 及 b 数值如何，$(-q')$ 和 q 在球外产生的电位函数 φ 均能满足条件(1) 和(2)。因此，若能根据条件(3)确定 q' 及 b 的数值，即可使上述镜像电荷 $(-q')$ 和 q 在球面上产生的电位也能满足条件(3)，则根据唯一性定理，由设置镜像电荷后的电位函数是唯一的解。为此，在球面上任取一点 P'，由条件(3) 有 $\varphi(P') = 0$，故得

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta}} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{b^2 + R^2 - 2Rb\cos\theta}} = 0$$

经过整理，可得

$$[q^2(b^2 + R^2) - q'^2(d^2 + R^2)] + 2R(q'^2 d - q^2 b)\cos\theta = 0$$

因对任意 θ 值(即球面上任一点)此式都应成立，因而它的左边两项必须分别为零，即

$$\begin{cases} q^2(b^2 + R^2) - q'^2(d^2 + R^2) = 0 \\ q'^2 d - q^2 b = 0 \end{cases}$$

解之得

$$b = \frac{R^2}{d} \quad 和 \quad q' = \sqrt{\frac{b}{d}}q = \frac{R}{d}q \tag{1-78}$$

于是，球外任意点 P 的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{d}\frac{1}{r'}\right) \tag{1-79}$$

由此可知，点电荷附近接地导体球的影响，可用位于距球心 b 处的镜像电荷 $(-q')$ 来表示。也即 $(-q')$ 代替金属球面上感应电荷的作用。(假如上述导体球

不接地而且事先也未带电，其结果如何？请读者自己考虑。)

现在研究镜像法对点电荷在双层介质中引起的电场的应用。如图 1-30 所示，平面分界面 S 的左、右半空间分别充满介电常数为 ε_1 与 ε_2 的均匀介质，在左半空间距 S 为 d 处有一点电荷 q，求空间的电场。

设左半空间电位为 φ_1，右半空间电位为 φ_2，根据唯一性定理，φ_1 与 φ_2 应满足下列条件：

(1) 除点电荷 q 所在处外，左、右半空间中分别有

$$\nabla^2\varphi_1 = 0 \quad , \quad \nabla^2\varphi_2 = 0;$$

(2) 当 $r \to \infty$ 时，$\varphi_1 \to 0$ 和 $\varphi_2 \to 0$;

(3) 在分界面 S 上，有衔接条件

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases}$$

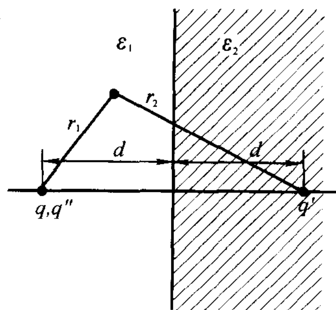


图 1-30 点电荷对无限大介质分界平面的镜像

这里使用这样的镜像系统：即认为左半空间的场由原来电荷 q 和在像点的像电荷 q' 所产生(这时介电常数 ε_1 的介质布满整个空间)；又认为右半空间的场由位于原来点电荷 q 处的像电荷 q'' 单独产生(这时介电常数为 ε_2 的介质布满整个空间)。

显然，不论 q' 和 q'' 的数值多大，条件(1)与条件(2)都能满足。故两介质中的电位表达式为

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right) \tag{1-80}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''}{r_1} \tag{1-81}$$

同时还需满足条件(3)。因此，在 $r_1 = r_2$ 处，由条件(3)得

$$\begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_1} + \dfrac{q'}{\varepsilon_1} = \dfrac{q''}{\varepsilon_2} \\ q - q' = q'' \end{cases}$$

解之得

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \tag{1-82}$$

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \tag{1-83}$$

以上介绍了镜像法中最典型的问题。应该指出，上述球面镜像问题可以反过来去求导体球腔内点电荷的电位和电场，不过这时像电荷是在球外罢了。对于一平行于介质分界平面(或导体平面)的线电荷，也有类似的镜像问题。实际上，能够用镜像法求解的问题还不止这些。

1.7.2 电轴法

分析长直两平行带电圆柱导体的电场(见图 1－31)具有实际意义，因为这种形式的导体在电力传输和通讯等工程中有着广泛的应用。但由于两圆柱导体表面上所带电荷的分布并不均匀，且是未知的，已知的通常是沿轴向单位长度表面上所带总电荷分别是 $+\tau$ 和 $-\tau$。所以直接求其引起的电场是有困难的。

对于两圆柱导体外部空间的电场，可以设想将两圆柱导体撤去，而其表面电荷效应代之以两根很长的带电细线。如图 1－31 中相距为 $2b$（b 的数值待定）的两根电荷线密度分别为 $+\tau$ 和 $-\tau$ 的带电细线。它们所在的轴线就是电轴，所以这种方法称为电轴法。

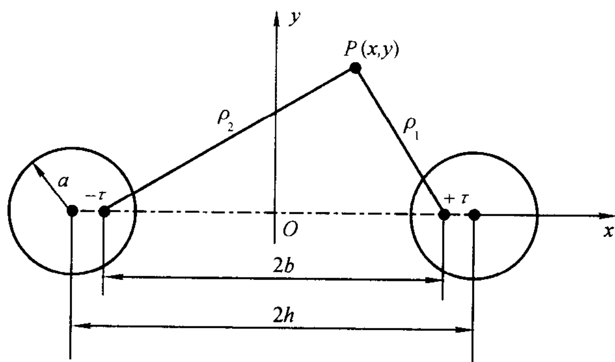


图 1－31　平行圆柱导体传输线

在两圆柱导体外部任一点上，由 $+\tau$ 和 $-\tau$ 共同引起的电位是

$$\varphi = C + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{1-84}$$

式中 C 为积分常数,它与参考点 Q 的选取有关。若 Q 点选在对称轴 y 轴上,则 $C=0$。所以

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+b)^2+y^2}}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}} \tag{1-85}$$

由上式知,当 $\rho_2/\rho_1 = K$ 时,φ 为常数,故该式为等位线的方程式。取平方后得

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 = \frac{(x+b)^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} = K^2$$

经过整理，有

$$\left(x - \frac{K^2+1}{K^2-1}b\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2bK}{K^2-1}\right)^2 \tag{1-86}$$

这是圆的方程。可见，在 xOy 平面上，等位线是一族圆，圆心坐标是

$\left[d\left(=\dfrac{K^2+1}{K^2-1}b\right),0\right]$，圆的半径是 $R=\left|\dfrac{2bK}{K^2-1}\right|$。还可看出各圆心的 x 坐标 d 是随 K 而变的，即这些等位线是一族偏心圆；而且每个圆的半径 R，圆心到原点的距离 d，线电荷所在处到原点的距离 b 三者之间的关系为

$$R^2+b^2=d^2 \tag{1-87}$$

根据唯一性定理，若要使两平行线电荷在两圆柱导体外部空间引起的电场与两圆柱导体之间原来的电场完全相同，则从上述等位线圆族中，必能找出两个与两圆柱导体表面圆周相重合的圆周来。也就是说，图 1－31 中圆柱导体的半径 a，轴心到原点的距离 h，电轴到原点的距离 b 三者之间也应满足(1－87)式表达的关系，即

$$a^2+b^2=h^2 \tag{1-88}$$

由上式就可确定出电轴位置 b 的数值。将 b 的数值代入(1－85)式，就可得两圆柱导体外部空间中的电位分布。

上述分析是在已知两圆柱导体表面上沿轴向单位长度所带总电荷量分别为 $+\tau$ 和 $-\tau$ 情况下进行的。然而，对于已知两圆柱导体间电压为 U_0 的大多数情况，借助(1－85)式，易得 τ 与 U_0 间的关系为

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}=\frac{U_0}{2\ln\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}$$

于是，两圆柱导体外部空间中的电位又可表示成

$$\varphi=\frac{U_0}{2\ln\dfrac{b+(h-a)}{b-(h-a)}}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{1-89}$$

例 1－18　图 1－32 (a)所示为两根不同半径，相互平行，轴线距离为 d，

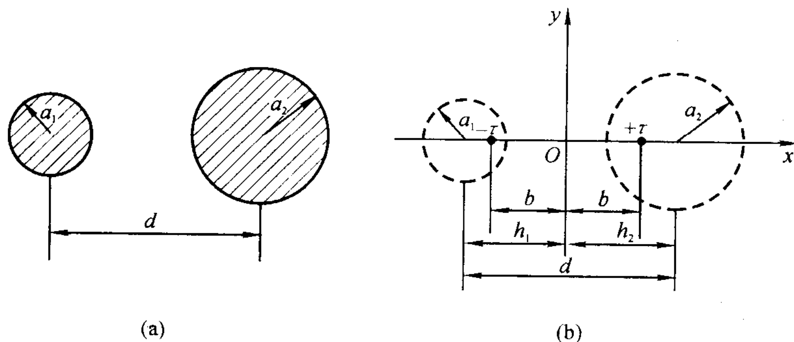


图 1－32　非对称传输线

单位长度分别带电荷 $+\tau$ 和 $-\tau$ 的长直圆柱导体。试决定电轴位置。

解：参阅图 1-32(b)，如能先求得 h_1 和 h_2，就可以确定坐标原点 O 及电轴位置。根据(1-87)式，可列出关系式

$$\begin{cases} b^2 = h_1^2 - a_1^2 \\ b^2 = h_2^2 - a_2^2 \\ d = h_1 + h_2 \end{cases}$$

这里 a_1、a_2 和 d 已知，h_1、h_2 和 b 是未知量。联立解之，得

$$h_1 = \frac{d^2 + a_1^2 - a_2^2}{2d} \quad 和 \quad h_2 = \frac{d^2 - a_1^2 + a_2^2}{2d} \tag{1-90}$$

习 题 (1-7)

1-7-1 在无限大导体平面上方 h 处，有一线电荷 τ，求空间任一点的电位和电场强度。

1-7-2 河面上方 h 处，有一输电线经过(导线半径 $R \ll h$)，其电荷线密度为 τ，河水的介电常数为 $80\varepsilon_0$。求镜像电荷的值。

1-7-3 在无限大接地导体平面两侧各有一点电荷 q_1 和 q_2，与导体平面的距离均为 d，求空间的电位分布。

1-7-4 真空中一点电荷 $q = 10^{-6}$C，放在距金属球壳(半径为 $R = 5$ cm)的球心 15 cm 处，求：

(1) 球面上各点的 $\varphi, \boldsymbol{E}$ 表达式。何处场强最大，数值如何？

(2) 若将球壳接地，则情况如何？

1-7-5 两根平行圆柱形导线，半径均为 2 cm，相距 12 cm，设加以 1000 V 电压，求两圆柱体表面上相距最近的点和最远的点的电荷面密度。

§1-8 电容和部分电容

普通物理学中已介绍过电容的概念及电容器的电容计算方法。通常电容器都是由两个导体组成的独立系统。在实际工作中，还常遇到三个或更多个导体组成的系统。可以认为，在多导体系统中，一个导体在其它导体的影响下，与另一导体构成的电容只能引入部分电容概念来描述。研究这些部分电容对于确定多导体系统的特性有重要意义。本节除简单回顾两导体组成的独立系统的电容外，重点讨论三个及三个以上导体所组成的系统中的电容，引入部分电容概念。

1.8.1 电容

通常，一个电容器是由两个带等量异号电荷的导体组成。它的电容 C 定义为此电荷与两导体间电压 U 之比，即

$$C = \frac{Q}{U} \tag{1-91}$$

电容 C 是一个重要的电路参数,其单位是 F(法)。它的大小只与两导体的形状、尺寸、相互位置及导体间的介质有关,而与带电的实际情况无关。有时,人们也会遇到计算一个孤立导体的电容,这是指该导体与无限远处另一导体间的电容。

电容的计算，也就是静电场的计算问题。下面研究无限长同轴导体圆柱面，其内导体每单位长度带有电荷 τ，外导体带有同样多的负电荷。不难求得两导体柱面间的电压是

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

所以每单位长度的电容是

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

其中 a 和 b 分别是内外圆柱导体的半径。同样，可以求出两同心球面导体间的电容是

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

必须注意，若 b 趋于无限大，此电容仍为有限值，这就是孤立导体球的电容。

1.8.2　部分电容

对于由三个及三个以上带电导体组成的系统，任意两个导体之间的电压不仅要受到它们自身电荷还要受到其余导体上电荷的影响。这时，系统中导体间的电压与导体电荷关系一般不能仅用一个电容来表示，需要将电容的概念加以扩充，引入部分电容概念。

如果一个系统，其中电场的分布只与系统内各带电体的形状、尺寸、相互位置及电介质的分布有关，而和系统外的带电体无关，并且所有电通[量]密度全部从系统内的带电体发出，也全部终止于系统内的带电体上，则称为静电独立系统。对于由 $(n+1)$ 个导体构成的静电独立系统,如令各导体按 $0\rightarrow n$ 顺序编号，则必有电荷关系

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_k + \cdots + q_n = 0 \tag{1-92}$$

进一步，假定该静电独立系统中的电介质是线性的。根据叠加原理，得各带电导体的电位与各导体的电荷之间有下列关系

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \cdots + \alpha_{1k}q_k + \cdots + \alpha_{1n}q_n \\
&\vdots \\
\varphi_k &= \alpha_{k1}q_1 + \alpha_{k2}q_2 + \cdots + \alpha_{kk}q_k + \cdots + \alpha_{kn}q_n \\
&\vdots \\
\varphi_n &= \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \cdots + \alpha_{nk}q_k + \cdots + \alpha_{nn}q_n
\end{aligned}\right\} \tag{1-93}$$

这里，已把0号导体选作电位参考点，即 $\varphi_0 = 0$。再之，由于受(1－92)式的约束，(1－93)式中没有 q_0 出现。

(1－93)式也可记作如下矩阵形式

$$[\varphi]=[\alpha][q] \tag{1-94}$$

式中，系数 α 称为电位系数。α_{ii} 称为自有电位系数；α_{ij} $(i \neq j)$ 称为互有电位系数。这些系数的涵义，不难从下列式子得到理解

$$\alpha_{k1} = \left.\frac{\varphi_k}{q_1}\right|_{q_2=q_3=\cdots=q_k=\cdots=q_n=0}$$

$$\alpha_{kk} = \left.\frac{\varphi_k}{q_k}\right|_{q_1=\cdots=q_{k-1}=q_{k+1}=\cdots=q_n=0}$$

此外，从上述式子也易看出电位系数的性质有：(1)电位系数都是正值；(2)自有电位系数 α_{ii} 大于与它有关的互有电位系数 α_{ij}；(3)电位系数只与导体的几何形状、尺寸、相互位置和电介质的介电常数有关；(4) $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$，即 $[\alpha]$ 为对称阵，这是静电场互易原理的表现。

多导体系统中电位、电荷的关系，也可用电荷为电位的函数来表示。如果求解上述方程，可得

$$[q]=[\alpha]^{-1}\quad[\varphi]=[\beta][\varphi] \tag{1-95}$$

即

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \cdots + \beta_{1k}\varphi_k + \cdots + \beta_{1n}\varphi_n \\
&\ \vdots \\
q_k &= \beta_{k1}\varphi_1 + \beta_{k2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{kk}\varphi_k + \cdots + \beta_{kn}\varphi_n \\
&\ \vdots \\
q_n &= \beta_{n1}\varphi_1 + \beta_{n2}\varphi_2 + \cdots + \beta_{nk}\varphi_k + \cdots + \beta_{nn}\varphi_n
\end{aligned}\right\} \tag{1-96}$$

式中，系数 β 称为静电感应系数。β_{ii} 称为自有感应系数；β_{ij} $(i \neq j)$ 称为互有感应系数。这些感应系数也是只和导体的几何形状、尺寸、相互位置及介质的介电常数有关。感应系数的涵义，不难从下列关系式看出

$$\beta_{k1} = \left.\frac{q_k}{\varphi_1}\right|_{\varphi_2=\varphi_3=\cdots=\varphi_k=\cdots=\varphi_n=0}$$

$$\beta_{kk} = \left.\frac{q_k}{\varphi_k}\right|_{\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{k-1}=\varphi_{k+1}=\cdots=\varphi_n=0}$$

感应系数的性质有：(1)自有感应系数都是正值；(2)互有感应系数都是负值；(3)自有感应系数 β_{ii} 大于与它有关的互有感应系数的绝对值 $|\beta_{ij}|$。

必须注意到，(1－96)式中的电位是以0号导体为参考点的，即该导体与0号导体间的电压。在分析实际问题时，为方便起见，把它改变成用该导体与其它

各导体间的电压来表示。为此，可将上述方程中的 q_1 改写如下

$$q_1 = (\beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1n})(\varphi_1 - 0) - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - \beta_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) - \cdots - \beta_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n)$$

令

$$C_{10} = \beta_{11} + \beta_{12} + \cdots + \beta_{1n}$$

$$C_{12} = -\beta_{12}\ ,\quad C_{13} = -\beta_{13},\cdots,\quad C_{1n} = -\beta_{1n}$$

则

$$q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + C_{13}U_{13} + \cdots + C_{1n}U_{1n}$$

这样，方程组(1-96)式化为

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + \cdots + C_{1k}U_{1k} + \cdots + C_{1n}U_{1n} \\ &\vdots \\ q_k &= C_{k1}U_{k1} + C_{k2}U_{k2} + \cdots + C_{k0}U_{k0} + \cdots + C_{kn}U_{kn} \\ &\vdots \\ q_n &= C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \cdots + C_{nk}U_{nk} + \cdots + C_{n0}U_{n0} \end{aligned}\right\} \quad (1-97)$$

式中，系数 C 称为部分电容。$C_{10}, C_{20}, \cdots, C_{k0}, \cdots, C_{n0}$ 称为自有部分电容；C_{12}, $C_{23}, \cdots, C_{kn}, \cdots$ 等称为互有部分电容。所有部分电容都为正值，也仅与导体的形状、尺寸、相互位置及介质的介电常数有关。此外，互有部分电容还具有互易性质，$C_{ij} = C_{ji}$。

顺便指出，在 $(n+1)$ 个导体构成的静电独立系统中，共应有 $n(n+1)/2$ 个部分电容。这些部分电容形成了一个电容网络，这样就把一个静电场的问题变为一个电容电路的问题，把场的概念和路的概念联系起来。图 1-33(a)示出由三个金属导体和大地组成的四导体系统，图 1-33(b)则为由六个部分电容构成的对应电容网络。

例 1-19 试计算考虑大地影响时的二线传输系统的各个部分电容，及二输电线间的等效电容。设二输电线距地面高度为 h，线间距离为 d，导线半径为 a，且 $a \ll d, a \ll h$，如图 1-34。

解：整个系统是由三个导体组成的静电独立系统，共有三个部分电容。为计算部分电容，先计算电位系数，有

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2\ ,\quad \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2$$

令 $\tau_1 = \tau, \tau_2 = 0$，计算此情况下的 φ_1、φ_2。将地面影响用镜像电荷代替，并略去导线 2 上感应电荷的影响，则得

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a}$$

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4h^2 + d^2}}{d}$$

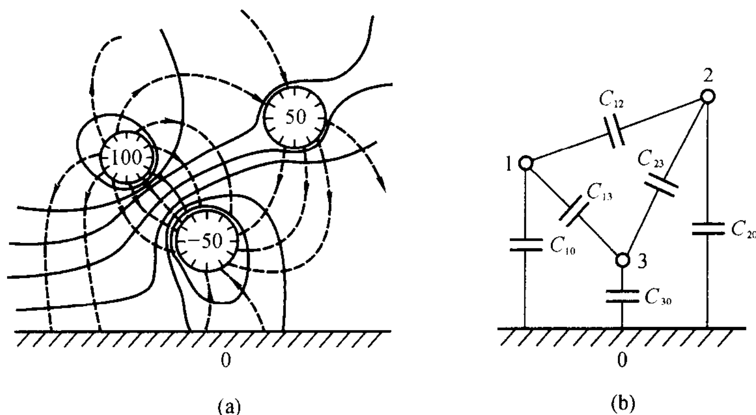


图 1－33　部分电容与电容网络

所以

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{a} \quad , \quad \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}$$

再根据各个系数间的关系，可得

$$C_{10} = C_{20} = \beta_{11} + \beta_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2h\sqrt{4h^2+d^2}}{ad}}$$

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}}{\left(\ln\dfrac{2h}{a}\right)^2 - \left(\ln\dfrac{\sqrt{4h^2+d^2}}{d}\right)^2}$$

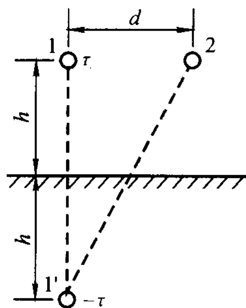


图 1－34　二线输电线

二线间的等效电容为

$$C_e = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10}+C_{20}} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{2h}{a}\dfrac{d}{\sqrt{4h^2+d^2}}\right)}$$

（注:等效电容——是指在多导体静电独立系统中,把两导体作为电容器的两个极板,设在这两个电极间加上已知电压 U,极板上所带电荷分别为 $\pm q$,则把比值$\dfrac{q}{U}$叫做这两导体间的等效电容）

例 1－20　已知二芯对称的屏蔽电缆如图 1－35，测得导体 1、2 间的等效电容为0.018 μF,导体 1、2 相连时和外壳间的等效电容为 0.032 μF，求各部分电容。

解：因二芯对称，故有 $C_{10} = C_{20}$，根据已知条件，有

$$C_{12}+\frac{C_{10}}{2}=0.018 \quad , \quad 2C_{10}=0.032$$

解之得

$$C_{10}=C_{20}=0.016\ \mu\text{F} \quad , \quad C_{12}=0.01\ \mu\text{F}$$

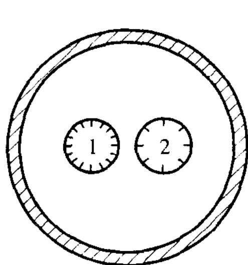


图 1-35 二芯屏蔽电缆

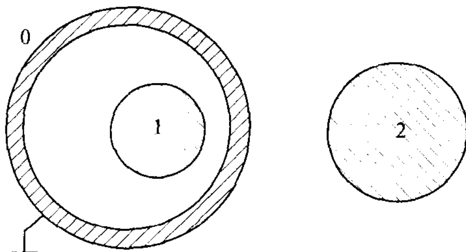


图 1-36 静电屏蔽

1.8.3 静电屏蔽

应用部分电容还可以说明静电屏蔽问题。设有图 1-36 所示三个导体的系统，1 号导体被 0 号导体完全包围着，且 0 号导体接地。由(1-97)式，应有方程组

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{10}U_{10}+C_{12}U_{12} \\ q_2 &= C_{21}U_{21}+C_{20}U_{20} \end{aligned}\right\} \tag{1-98}$$

令 $q_1=0$,则 0 号导体内无电场,因此 $U_{10}=0$。由(1-98)式中第一个方程，得

$$C_{12}U_{12}=0$$

但 U_{12} 可有各种数值(由于导体 2 的电荷可取任意值),故必有 $C_{12}=0$。因此，在 0 号导体接地的情况下，得

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{10}U_{10} \\ q_2 &= C_{20}U_{20} \end{aligned}\right\} \tag{1-99}$$

这说明了 q_1 只与 U_{10} 有关,q_2 只与 U_{20} 有关。即 1 号导体与 2 号导体之间无静电联系，达到了静电屏蔽的要求。也就是说，0 号导体的存在，消除了导体 1、2 间的静电联系。在工程上，常常把不可受外界电场影响的带电体或不希望去影响外界的带电体用一个接地的金属壳罩起来，以隔绝有害的静电影响。例如高压设备周围的屏蔽网等，就是起静电屏蔽作用的。

习　题　(1-8)

1-8-1 两个小球半径均为 1 cm，相距为 20 cm，位于空气中。

(1) 若已知 φ_1,φ_2,求 q_1,q_2;

(2) 若已知 φ_1,q_2,求 q_1,φ_2;

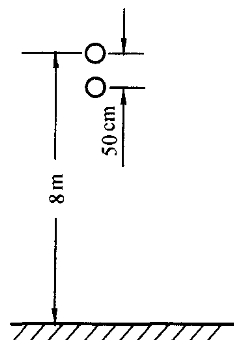
(3) 欲使小球 1 带电荷 $q_1 = 10^{-8}$ C, 小球 2 不带电荷，问该用什么方法?

1-8-2 若将某对称的三芯电缆中三个导体相联，测得导体与铅皮间的电容为 0.051 μF，若将电缆中的两导体与铅皮相联，它们与另一导体间的电容为 0.037 μF，求：

(1) 电缆的各部分电容;

(2) 每一相的工作电容;

(3) 若在导体 1、2 之间加直流电压 100 V，求导体每单位长度的电荷量。



题 1-8-3 图

1-8-3 两平行导线位于与地面垂直的平面内如题 1-8-3 图所示，已知导体半径为 2 mm，求导线单位长度的部分电容以及两导线间的等效电容。

§1-9 静电能量与力

电场对静止电荷有力的作用，对运动的电荷则要作功。可见，静电场中储存着能量。把静电场中的储能称之为静电能量。这一节介绍静电能量的计算及静电能量的分布方式，并在此基础上介绍计算导体系统中的静电力的虚位移法。

1.9.1 带电体系统中的静电能量

静电能量是在电场的建立过程中，由外力作功转化而来的。因此，可以根据建立该电场时，外力所作的功来计算静电能量。

首先讨论由作任意分布的电荷系统所引起的电场中的静电能量。设电荷体密度是 ρ,此外,假设介质是线性的。在建立这样的电荷系统过程中的某一瞬时，场中某一点的电位是 $\varphi'(x,y,z)$,再将电荷增量 δq 从无穷远移至该点，外力需要作功

$$\delta A = \varphi'(x,y,z)\,\delta q \tag{1-100}$$

这个功转化为静电能量储存在电场中。全部静电能量，可通过上式的积分而得出。

对于线性介质的情况，使电荷达到最后的分布需作的功是一定的，与实现这一分布的过程无关。因此，可选择这样一种充电方式，使任何瞬间所有带电体的电荷密度都按同样比例增长，令此比值为 m,且 $0\leqslant m\leqslant 1$,即 m 是变量，充电开始时各处电荷密度都为零(相当于 $m=0$) ,充电终了时各处电荷密度都等于其最终值(相当于 $m=1$) 。在任何中间瞬时，电荷密度的增量

$$\delta\rho = \delta[m\rho(x,y,z)] = \rho(x,y,z)\delta m$$

则将(1－100)式进行积分得总静电能量为

$$W_e = \int_0^1 \delta m \int_V \rho(x,y,z)\varphi'(m;x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

由于所有电荷按同一比值 m 增长，故 $\varphi'(m;x,y,z) = m\varphi(x,y,z)$，这里 $\varphi(x,y,z)$ 是 (x,y,z) 点上充电终了时的 φ 值。因而

$$W_e = \int_0^1 m\delta m \int_V \rho\varphi\,\mathrm{d}V$$

故

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\,\mathrm{d}V \tag{1-101}$$

这就是用电荷和电位表示的连续体电荷系统的静电能量。

类似地，对于面积电荷，有

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\,\mathrm{d}S \tag{1-102}$$

对于系统中只有带电导体的情况，则

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_k \varphi_k \int_{S_k} \sigma_k\,\mathrm{d}S$$

故

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_k \varphi_k q_k \tag{1-103}$$

式中，q_k 和 φ_k 分别是第 k 号导体表面上分布的总电荷量和其电位值。

1.9.2 静电能量的分布及其密度

(1－101)式、(1－102)式和(1－103)式都是计算总静电能量的，而没有说明能量的分布情况，这些公式还容易给人一种印象，似乎静电能量集中在电荷上。其实静电能量是分布于电场存在的整个空间中。应用下面关系式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi \quad 和 \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

以及矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{D}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$$

再应用散度定理，则(1－101)式变为

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\oint_S \varphi\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-104}$$

(1－104)式中的积分体积 V 只要包含所有电荷即可，S 是限定 V 的外表面。可以把 V 扩展到整个无限空间，即 S 为半径取 ∞ 的球面。对一大球面积分，由于 φ 与 $\frac{1}{r}$ 成正比，D 与 $\frac{1}{r^2}$ 成正比且 $\mathrm{d}S$ 与 r^2 成正比，所以上式右边的第二个积

分随$\frac{1}{r}$变化。如果积分遍及无限大的空间(即 $r \to \infty$)，则第二项积分为零，故得

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V \tag{1-105}$$

这就是用场量 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 表示的静电能量。(1－105)式的物理概念是：凡是静电场不为零的空间都储存着静电能量，场中任一点的静电能量密度是

$$w'_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1-106}$$

到此为止，得到两个静电能量公式，即(1－101)式和(1－105)式。两个都是体积分式，称(1－101)式为电荷积分式，积分区域为有电荷分布的区域；称(1－105)式为电场积分式，积分区域为整个空间，也就是有电场分布的全部区域。(1－105)式只有在对全部电场空间积分时才与(1－101)式相同。

例 1－21 真空中一半径为 a 的球体内分布有体密度为常量 ρ 的电荷，试求静电能量。

解：应用高斯定律，求得电场强度为

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r < a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r > a \end{cases}$$

应用(1－105)式，故

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\varepsilon_0^2}4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\varepsilon_0^2 r^4}4\pi r^2 \mathrm{d}r\right)$$

$$= \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$$

也可利用(1－101)式计算能量，先求得电位函数的结果是

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} & r > a \\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \dfrac{r^2}{3}\right) & r < a \end{cases}$$

故

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0}\int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right)4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5$$

两种方法所得结果相同。

例 1－22 一半径为 a 的均匀球面电荷，电荷面密度为 σ，试求静电能量。

解：由(1-102)式，有

$$W_e = \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi\, dS$$

球面上的电位为 $\varphi|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$，$\left(Q = \int_S \sigma dS\right)$。由于在球面 S 上 φ 是常数，故

$$W_e = \left(\frac{1}{2}\int \sigma dS\right)\varphi$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

另一种计算方法，根据(1-105)式，有

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E^2 dV$$

应用高斯定律，得 $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r \geqslant a; E = 0, r < a$。因此

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

二者结果相同。

例 1-23 真空中有 n 个点电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。试求静电能量。

解：如果应用(1-105)式来计算，且令 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_n$ 分别为由电荷 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 单独存在时所引起的电场强度。当 n 个点电荷都存在时，合成电场强度

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \cdots + \boldsymbol{E}_n$$

从而

$$|\boldsymbol{E}|^2 = (|\boldsymbol{E}_1|^2 + |\boldsymbol{E}_2|^2 + \cdots + |\boldsymbol{E}_n|^2) + 2(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_{n-1}\cdot\boldsymbol{E}_n)$$

故，静电能量

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V (|\boldsymbol{E}_1|^2 + |\boldsymbol{E}_2|^2 + \cdots + |\boldsymbol{E}_n|^2)\, dV + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V 2(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_3 + \cdots + \boldsymbol{E}_{n-1}\cdot\boldsymbol{E}_n)\, dV \quad (1-107)$$

这就是点电荷系统的静电能量。等号右边第一个积分称为自有能量，当电荷相互移近或移远时不会改变。如果令 $(W_e)_j = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |\boldsymbol{E}_j|^2 dV$，它表示只与电荷 q_j 有关的一部分自有能量，是将许多元电荷 dq“压紧”以构成 q_j 需要做的功(压紧

时,必须克服同号电荷间斥力),对于点电荷,这部分功为无限大。第二个积分称为互有能量,是由电荷之间的相互作用引起的,随电荷间相互移近或移远而改变。采用 $W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\varphi_k q_k$ 计算时,若 φ_k 是除q_k 以外其余各个点电荷在q_k 处所引起的电位，则计算出的是互有能量。

例 1-24 一个原子可以看成是由一个带正电荷 q 的原子核被总电荷量等于$(-q)$且均匀分布于球形体积内的负电荷云包围，如图 1-37 所示。试求原子的结合能。

解：原子的结合能应由两部分组成。一部分是均匀分布于球形体积内的负电荷的自有能量 $\left(=\frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5\right)$。另一部分是正的点电荷与负电荷云间的互有能量,等于 $q\varphi_-(0)$。这里 $\varphi_-(0)$ 是负电荷云在 $r=0$ 处,即正点电荷所在位置引起的电位,其值等于 $-\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 a}$。因此,$q\varphi_-(0)=\frac{-3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$。从而得所求能量

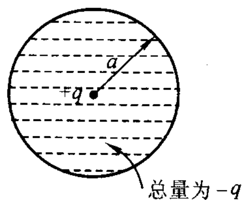


图 1-37 原子结构

$$W = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 a^5 + \left(\frac{-3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\right) = -\frac{9q^2}{40\pi\varepsilon_0 a}$$

这一能量等于把两份电荷从无穷远处移来置于原子中的位置时必须作的功。

1.9.3 静电力

在静电场中，各个带电体都要受到电场力。这个力可直接根据电场强度的定义来计算

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{1-108}$$

这里的 $\boldsymbol{E}$ 应理解为除q 以外其它电荷在q 处引起的电场强度。对于连续分布的电荷 q,若应用(1-108)式，一般计算是相当复杂的。由于力和能量之间是有密切联系的，所以根据能量求力往往要方便得多。下面介绍的虚位移法就是一种基于虚功原理计算静电力的方法。

采用虚位移法计算静电力，要用到广义坐标和广义力的概念。广义坐标是指确定系统中各导体形状、尺寸与位置的一组独立几何量，如距离、面积、体积或角度等。企图改变某一广义坐标的力，就称为对应于该广义坐标的广义力。广义力乘上由它引起的广义坐标的改变量，应等于功。

下面研究由$(n+1)$个导体组成的系统。假定除了 p 号导体外其余的导体都不动,且 p 号导体也只有一个广义坐标g 发生变化。这时，该系统所发生的功能过程为

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_e + f\mathrm{d}g \tag{1-109}$$

式中，$dW(=\sum\varphi_k dq_k)$表示与各带电体相联结的外电源提供的能量；dW_e和fdg分别表示静电能量的增量和电场力所作的功。以下分别讨论两种情况：

（1）虚位移时，假定各带电体的总电荷维持不变。也就是当p号导体位移时，所有带电体都不和外电源相联，因而$dq_k=0$，即$dW=0$。功能关系写成

$$0 = dW_e + fdg$$

或

$$fdg = -dW_e|_{q_k=\text{常量}}$$

从而得

$$f = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q_k=\text{常量}} \tag{1-110}$$

这时，外源被隔绝，电场力要作功只有靠减少电场中的静电能量来实现。

（2）虚位移时，假定各带电体的电位维持不变。当p号导体位移时，所有导体都接电源即可。φ_k为常量 。于是，由(1-103)式，有

$$dW_e = d\left(\frac{1}{2}\sum q_k\varphi_k\right) = \frac{1}{2}\sum\varphi_k dq_k = \frac{1}{2}dW$$

表明外电源提供的能量有一半用于静电能量的增量，另一半用于电场力作功。也就是电场力作功等于静电能量的增量

$$fdg = dW_e|_{\varphi_k=\text{常量}}$$

从而得

$$f = \left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k=\text{常量}} \tag{1-111}$$

以上两种情况所得结果应该是相等的。事实上，带电体并没有移动(即虚位移)，电场力的分布当然没有改变，求得的是在当时的电荷和电位情况下的力。

下面用平板(或球形)电容器中的电场力为例来说明上述结论。此时，电场能量$W_e=\frac{1}{2}CU^2$或$W_e=\frac{q^2}{2C}$。分别用两个公式求力，得

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{-\partial W_e}{\partial g}\Big|_{q_k=\text{常量}} = -\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{C}\right) \\ &= \frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial g} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g} \\ f &= \frac{\partial W_e}{\partial g}\Big|_{\varphi_k=\text{常量}} = \frac{\partial}{\partial g}\left(\frac{1}{2}CU^2\right) = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial g} \end{aligned}\right\} \tag{1-112}$$

可见结果是相同的。可以看出，电场力有使电容C增大的趋势。

例 1－25 平板电容器的极板面积为 S，板间距离为 d，所加电压为 U，介质的介电常数为 ε。求作用于每个极板上的电场力以及任一极板上单位面积所受的力。

解：已知平板电容器的电容为 $C=\varepsilon S/d$，如取 d 为广义坐标，则作用在极板上的力

$$f=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d}=-\frac{U^2\varepsilon S}{2d^2}$$

式中的负号表示力的方向与 d 增大的方向相反。也就是电场力 f 有使 d 缩短的趋势。如图 1－38 所示，正极板所受的力 $\boldsymbol{f}_1=\frac{U^2\varepsilon S}{2d^2}\boldsymbol{e}_x$，负极板所受的力 $\boldsymbol{f}_2=\frac{U^2\varepsilon S}{2d^2}(-\boldsymbol{e}_x)$。

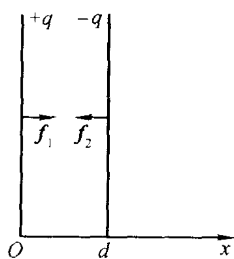


图 1－38 平板电容器

作用在任一极板单位面积上的力为

$$f'=\frac{f}{S}=\frac{U^2\varepsilon}{2d^2}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$$

或引入极板上面积电荷密度 σ，则可表示为

$$f'=\frac{1}{2}\sigma E$$

值得注意的是，这里有系数 1/2，而不能简单地使用 σE。

例 1－26 今有一球形薄膜带电表面，半径为 a，其上带电荷 q。求薄膜单位面积上所受的膨胀力。

解：孤立导体球的电容 $C=4\pi\varepsilon_0 a$。采用球坐标，原点置于球心，选广义坐标 g 为 a，则

$$f_r=\frac{q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial a}=\frac{q^2}{2C^2}4\pi\varepsilon_0$$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$$

f_r 的方向与 a 增大的方向相同，为膨胀力。单位面积上的力

$$f_r'=\frac{q^2}{2\varepsilon_0(4\pi a^2)^2}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{1}{2}\sigma E=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$$

该膨胀力是由于电荷同号相斥而产生的。

最后，介绍法拉弟对静电力的看法，称之为法拉弟观点。法拉弟认为，在静电场中的每一段电通[量]密度管，沿其轴向要受到纵张力，而在垂直于轴向方向则要受到侧压力，如图 1－39 所示。纵张力和侧压力的量值相等，都是 $\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}$，单位是 N/m^2（牛/米^2）。因此，形象地说，电位移管本身好象被拉紧

了的橡皮筋，沿轴向方向，它有收缩的趋势；而在垂直于轴向方向，它有扩张趋势。

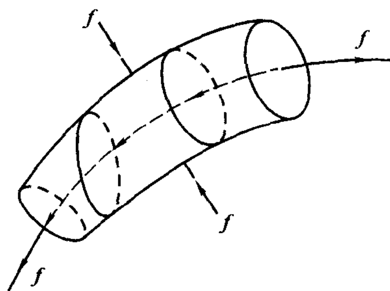


图 1-39 电位移管的受力情况

应用上述观点，可根据场图来判断带电体的受力情况，并且有助于定量计算。例如，一个孤立的带电体表面有扩张本身体积的趋势(见图 1-40 (a))；两个带等量异号电荷的导体，将互相吸引(见图 1-40 (b))；两个带等量同号电荷的导体，将互相排斥(见图 1-40 (c))；一个不带电的导体有被吸向带电体的趋势(见图(1-40 (d))。这些都不难结合场图，应用法拉弟观点作出解释。

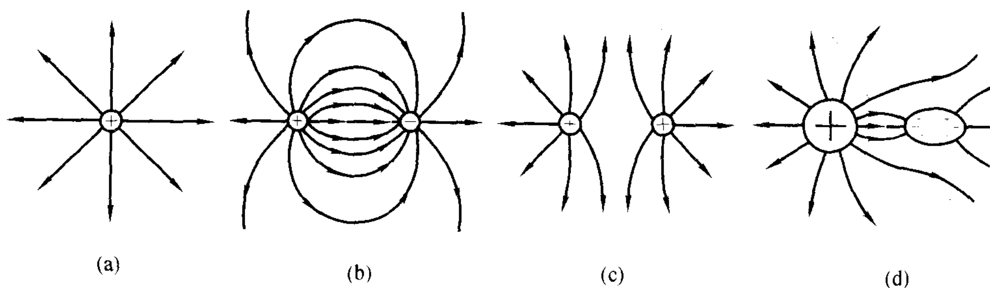


图 1-40

例 1-27 求图 1-41 (a)和 1-41 (b)所示平行板电容器中，两种介质分界面上每单位面积所受的力。

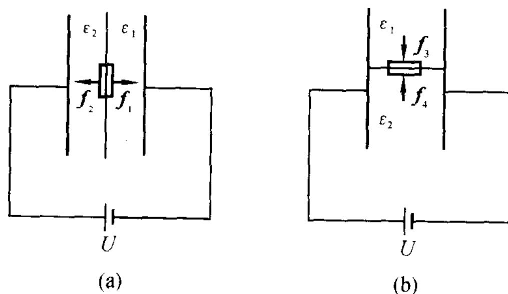


图 1-41 平板电容器

解：先讨论图 1-41 (a)，以分界面为基准，沿电场方向作一很短的电通[量]密度管，截面积为 ΔS。根据法拉弟观点，分界面右边管壁上受的力 f_1 =

$\dfrac{D^2}{2\varepsilon_1}\Delta S$，分界面左边管壁上受的力 $f_2=\dfrac{D^2}{2\varepsilon_2}\Delta S$。如果令所取电通[量]密度管的长度趋于零，即得分界面的 ΔS 上所受的力

$$f_a = f_1 - f_2 = \frac{D^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\Delta S$$

每单位面积所受的力

$$f_a' = \frac{D^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right) \tag{1-113}$$

这里假定 $\boldsymbol{f}_a$ 和 $\boldsymbol{f}_a'$ 的方向都与 $\boldsymbol{f}_1$ 一致。

再看图 1－41 (b)，仍以分界面为基准作一横截面很小的电通[量]密度管，设其侧面积为 ΔS。分界面上边的侧面所受的压力为 $f_3=\dfrac{1}{2}\varepsilon_1E^2\Delta S$，分界面下边的侧面积所受的压力为 $f_4=\dfrac{1}{2}\varepsilon_2E^2\Delta S$。如果令电通[量]密度管的厚度趋于零，即可得分界面的 ΔS 上所受之力

$$f_b = f_4 - f_3 = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\Delta S$$

单位面积上所受的力

$$f_b' = \frac{E^2}{2}(\varepsilon_2-\varepsilon_1) \tag{1-114}$$

这里假定了 $\boldsymbol{f}_b$ 和 $\boldsymbol{f}_b'$ 的方向都与 $\boldsymbol{f}_4$ 一致。

上述结果说明，当有电场垂直或平行于两种电介质的分界面时，作用在分界面处的力总是和分界面垂直的，并且由介电常数大的一边指向介电常数小的一边。事实上，可以证明，在两种介质分界面上，作用于单位面积上的电场力为

$$f' = \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1\varepsilon_2}(D_{1n}^2+\varepsilon_1\varepsilon_2E_{1t}^2) \tag{1-115}$$

而且不论电场方向如何，此力总是垂直于该元面积，且总是由介电常数较大的介质一边指向介电常数较小的一边。

习 题 (1－9)

1－9－1 两个电容器 C_1 和 C_2 各充以电荷 q_1 和 q_2。然后移去电源，再将两电容器并联，问总的能量是否减少？减少了多少？到哪里去了？

1－9－2 半径分别为 a 和 b 的两同轴圆柱，所带电荷之和为零。试求下列各种电荷分布下，沿轴向每单位长度中储存的能量。

(1) 每一圆柱面上的电荷为 $\sigma_a 2\pi a$ ($=-\sigma_b 2\pi b$)

(2) 内柱中电荷的体密度为 ρ_a，外柱有面密度为 σ_b 的面电荷，且

$$\sigma_b 2\pi b = -\rho_a \pi a^2$$

(3) 内柱中电荷的体密度为 ρ_a，两柱之间区域内电荷的体密度为 ρ_b，且 $\rho_a \pi a^2 = -\rho_b \pi(b^2 - a^2)$

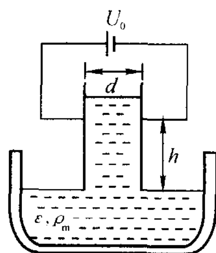
1-9-3　用 8 mm 厚、$\varepsilon_r = 5$ 的电介质片隔开的两片金属盘，形成一电容为 1 pF 的平行板电容器，并接到 1 kV 电源。如果不计摩擦，要把电介质片从两金属盘间移出来，问在下列两种情况各需作多少功？

(1) 移动前，电源已断开；

(2) 移动中，电源一直联着。

1-9-4　一个由两只同心导电球壳构成的电容器，内球半径为 a，外球壳半径为 b，外球壳很薄，其厚度可略去不计，两球壳上所带电荷分别是 $+Q$ 和 $-Q$，均匀分布在球面上。求这个同心球形电容器的静电能量。

1-9-5　板间距为 d，电压为 U_0 的两平行板电极，浸于介电常数为 ε 的液态介质中，如题 1-9-5 图所示。已知介质液体的质量密度是 ρ_m，问两极板间的液体将升高多少？



题 1-9-5 图

1-9-6　应用虚位移法，计算**例 1-27** 平行板电容器中两种介质分界面上每单位面积所受的力。

提　要

1. 静电场的基础是库仑定律。静电场的基本场量是电场强度

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\boldsymbol{f}}{q_0}$$

真空中位于原点的点电荷 q 在 $\boldsymbol{r}$ 处引起的电场强度

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \boldsymbol{e}_r$$

连续分布的电荷引起的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}q$$

式中的 $\mathrm{d}q$ 可以是 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$，$\sigma(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$，$\tau(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l'$ 或它们的组合。

2. 电介质对电场的影响可以归结为极化后极化电荷所产生的影响。介质极化的程度用电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 表示

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}}{\Delta V}$$

极化电荷的体密度 ρ_P 和面密度 σ_P 与电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 间的关系分别为

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \quad 和 \quad \sigma_P = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}_n$$

3. 静电场基本方程的积分和微分形式分别是

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

电通[量]密度 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$。在各向同性的线性介质中，

$$\boldsymbol{P} = \chi \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

4. 由静电场的无旋性，引入标量电位

$$\varphi = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

或

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$$

在各向同性的线性均匀电介质中，电位满足泊松方程或拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon, \quad \nabla^2 \varphi = 0$$

5. 静电场问题都可归结为在给定边界条件的情况下，求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题。边界条件分为以下三类：

第一类边值 $\varphi|_S = f_1(s)$

第二类边值 $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = f_2(s)$

第三类边值 $\left.\left(\varphi + \beta \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\right|_S = f_3(s)$

另外，在不同媒质的分界面上，场量的衔接条件为

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad , \quad E_{2t} = E_{1t}$$

或者

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\sigma \quad , \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

只要满足给定的边界条件，泊松方程或拉普拉斯方程的解是唯一的。

6. 在静电场边值问题的分析中，常采用以下几种重要的求解方法：

(1) 直接积分法：适用于一维电场问题，采用常微分方程的求解方法。

(2) 分离变量法：适用于二维或三维电场问题。关键是能否选择出可分离变量的坐标系使场域的边界面和媒质分界面均与所选坐标系的坐标面相吻合。

(3) 有限差分法：它首先将场域用适当的网格离散化。然后，在各网格节点上用位函数的差商来近似替代该点的偏导数，把偏微分方程转化为一组相应的差分方程，解之即得位函数在各网格节点上的数值解。

(4) 镜像法：点电荷对于无限大接地导体平面的镜像特点是：等量异号、位置对称，镜像电荷位于边界外。点电荷对两种无限大电介质分界平面的镜像计算如下。

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad (\text{适用区域 } \varepsilon_1)$$

$$q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \qquad (\text{适用区域 } \varepsilon_2)$$

位置对称。

在点电荷对接地金属球问题中，如点电荷在球外，则镜像电荷 $q' = -\frac{R}{d}q$，它与球心相距 $b = R^2/d$。

(5) 电轴法：只能解决带等量异号电荷的两平行圆柱导体间的静电场问题，可通过

$$h^2 - a^2 = b^2$$

确定电轴的位置。

7. 在线性介质内由多个导体组成的静电独立系统中，必须应用“部分电容”来代替电容器的“电容”概念。这时，电位与电荷有关系：$[\varphi] = [\alpha][q]$；电荷与电位有关系：$[q] = [\beta][\varphi]$；电荷与电压有关系：$[q] = [C][U]$。部分电容 C 组成电容网络，它只与各导体的几何形状、大小、相互位置及介质分布有关，而与导体的电荷量无关。

8. 静电能量的计算，可应用

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi \, dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi \, dS$$

或

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} dV$$

或

$$W_e = \frac{1}{2}\sum \varphi_k q_k$$

静电能量的体密度为

$$w'_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}$$

9. 静电力的计算，可应用

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}q$$

或应用虚位移法

$$f_g = \left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{\varphi_k = \text{常量}} = -\left.\frac{\partial W_e}{\partial g}\right|_{q_k = \text{常量}}$$

利用法拉弟对静电力的观点亦可以分析带电体受力的情况。

思　考　题

1-1　试回答下列各问题：

(1) 等位面上的电位处处一样，因此面上各处的电场强度的数值也一样。这句话对吗？试举例说明。

(2) 某处电位 $\varphi = 0$,因此那里的电场 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\nabla 0 = 0$。对吗？

(3) 甲处电位是 10 000 V，乙处电位是 10 V，故甲处的电场强度大于乙处的电场强度。对吗？

1-2　电力线是不是点电荷在电场中的运动轨迹？(设此点电荷除电场力外不受其它力的作用。)

1-3　证明，等位区的充要条件是该区域内场强处处为零。

1-4　下列说法是否正确？如不正确，请举一反例加以论述。

(1) 场强相等的区域，电位亦处处相等。

(2) 电位相等处，场强也相等。

(3) 场强大处，电位一定高。

(4) 电场为零处，电位一定为零。

(5) 电位为零处，场强一定等于零。

1-5　两条电力线能否相切？同一条电力线上任意两点的电位能否相等？为什么？

1-6　不同电位的两个等位面能否相交或相切？同一等位面内任意两点的场强是否一定相等？场强在等位面上的切向分量是否一定等于零？电位在带电面两侧会不会突变？

1-7　下列叙述是否正确？在什么情况下正确？什么情况下不正确？试举例说明之。

(1) 接地的导体都不带电。

(2) 一导体的电位为零，则该导体不带电。

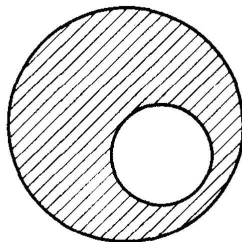
(3) 任何导体，只要它所带的电荷量不变，则其电位也是不变的。

1-8　在一不带电的导体球内，挖出一偏心的球形空腔，如图所示。

(1) 若在空腔中心放一点电荷，试问腔表面和球的外表面上电荷及腔内、腔外各处的场强分布如何？

(2) 若 q 不在空腔的中心，则腔表面和球的外表面上电荷怎样分布？球外的场强怎样分布？

(3) 若点电荷 q 放在空腔中心，但在球外也放一点电荷，则腔表面和球表面上电荷怎样分布？



思考题 1-8 图

1-9　将一接地的导体 B 移近一带正电的孤立导体 A 时，A 的电位升高还是降低？(从能量观点分析。)

1-10　两绝缘导体 A 和 B，带等量异号电荷，现把第三个不带电的导体 C 插入 A、B 之间(不与它们接触)，试问电位差 $\varphi_A - \varphi_B$ 是增加还是减少？(从能量观点分析。)

1-11　若把一个带电体放在一个金属壳附近，这带电体在金属壳内单独产生的场强

是否为零？金属壳的静电屏蔽作用是怎样产生的？

1-12　若把一个带正电的导体A移到一个中性导体B附近，导体B的电位是升高还是降低？A的电位是升高还是降低？为什么？

1-13　一圆形气球，电荷均匀分布在其表面上，在此气球被吹大的过程中，球内外的场强如何变化？

1-14　在一个中性导体球壳的中心放一电荷量为 q 的点电荷，这时球壳内外表面各带多少电荷量？若把点电荷从球壳中心移到壳内其它点，球壳内外表面上的电荷分布变不变？球壳内外的场强分布变不变？

1-15　电介质的极化和导体的静电感应有何不同？如何考虑电介质和导体在静电场中的效应？自由电荷与束缚电荷的区别是什么？

1-16　说明 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{P}$ 三矢量的物理意义。$\boldsymbol{E}$ 与介质有关，$\boldsymbol{D}$ 与介质无关的说法对吗？

1-17　若电场中放入电介质后，自由电荷分布未变，电介质中的场强大小是否一定比真空中的场强小？

1-18　有人说，均匀介质极化后不会产生体分布的极化电荷，只是在介质的表面上才出现面分布的极化电荷，若均匀介质是无限大的，那末它的表面在无限远处，那里的极化电荷对考察点的场无影响，因此均匀的无限大的电介质与真空完全相同。你是否同意这种看法？

1-19　均匀介质的极化与均匀极化的介质这两个概念是否有区别？哪种情况(如果有的话)可能出现体分布的极化电荷？

1-20　证明：任何形状的导体空腔当其内部无电荷时，腔内场强处处为零。

1-21　以下各式哪些是普遍成立的？哪些是有条件的？

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q \qquad -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = q_p$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P} = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \qquad \sigma_P = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n$$

1-22　有带电为 q 的球体，附近有一块介电常数 ε 的介质，如思考题1-22图所示。请问下列公式成立否？

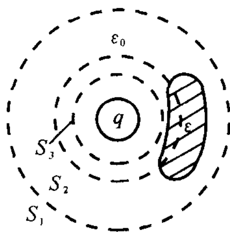
$$\oiint_{S_1} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$$

$$\oiint_{S_2} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$$

$$\oiint_{S_3} \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\oiint_{S_1} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



思考题1-22图

$$\oint\!\!\!\oint_{S_2} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

1－23　已证明，在两种不同的电介质的分界面上，电场强度的法向分量不连续，即 $E_{1n}\neq E_{2n}$，能求出 $E_{2n}-E_{1n}$的值吗？并由此说明在两种介质的分界面上，电场强度产生突变的原因。

1－24　试说明：满足拉普拉斯方程$\nabla^2\varphi=0$的电位函数 φ 无极值。

1－25　举例说明边界条件和分界面上的衔接条件在静电场分析计算中的作用。

1－26　举例说明叠加原理在静电场分析计算中的应用。

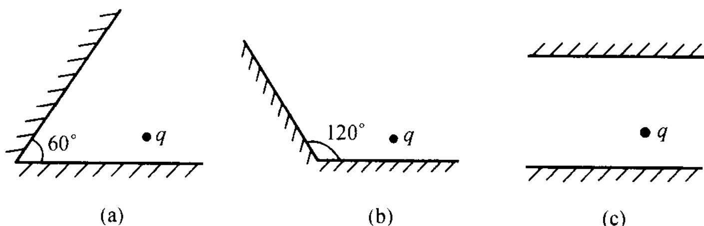
1－27　唯一性定理在静电场的分析计算中起什么作用？试举例说明。

1－28　请归纳静电场的分析计算中存在哪些基本问题？可能碰到的边界条件有几种？解决静电场问题有哪些基本方法？

1－29　电缆为什么要制成多层绝缘的结构(即在内、外导体间用介电常数各不相同的多层介质)？各层介质的介电常数的选取遵循什么原则？为什么？

1－30　确定镜像电荷的分布主要有哪两点？已学过的有哪几种典型的镜像问题？并总结之。说明镜像电荷是代替哪些实际存在的电荷分布。

1－31　以下各小题(见思考题 1－31 图)能否用镜像法求解？如能，画出其镜像电荷的位置并标明数值；如不能，说明理由。



思考题 1－31 图

1－32　电容量一定的电容器，它贮存的电能有无上限？为什么？

1－33　说明多导体系统中部分电容与等值电容的含义，并以计及地面影响的二线输电线为例说明两者的区别。

1－34　静电场中储存的能量可从哪几个方面来计算，它们各适用于什么情况？是否因为 $w_e'=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$，而当电容器中的介电常数 ε 增加后，电场能量也增加。

1－35　能否把$\frac{1}{2}\rho\varphi$ 当作电场能量的体密度？为什么？

1－36　静电能量计算公式 $W_e=\frac{1}{2}\int_V\rho\varphi\,\mathrm{d}V$ 和 $W_e=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}V$ 之间有怎样的联系?两者是否一致?

1－37　有人说，介质存在时的静电能量等于没有介质的情况下，把自由电荷和极化电荷(也看作自由电荷)从无穷远搬到场中原来位置的过程中外力所作的功。这种说法对吗?为什么?

1－38　设平行板电容器始终和电源相连。今把其中一块极板相对另一块极板向外平

移一定距离，在这个过程中电场力作正功还是作负功？电场能量是增加还是减少？以电容器为系统，这系统的能量是否守恒？能量变化的部分到哪儿去了？

1－39　应用法拉弟观点说明静电力，并举例说明。将一不带电的导体球放入不均匀电场中，试问该球受力方向如何？为什么？

习　题

1－1　由方程 $x^3+y^2+z^2=1\,000$（其中 x,y 和 z 皆为正值）决定的曲面是一个电位为 200 V 的等位面。如果已知曲面上 P 点(7 m,25 m,32 m)的$|\boldsymbol{E}|=50$ V/m，求该点上的 $\boldsymbol{E}$。

1－2　两半径为 a 和 b ($a<b$)的同心导体球面间电位差为 V_0，问：若 b 固定，要使半径为 a 的球面上场强最小，a 与 b 的比值应是多少？

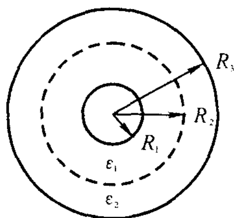
1－3　具有两层同轴介质的圆柱形电容器，内导体的直径为 2cm，内层介质的相对介电常数 $\varepsilon_{r1}=3$，外层介质的相对介电常数 $\varepsilon_{r2}=2$，要使两层介质中的最大场强相等，并且内层介质所承受的电压和外层介质相等，问两层介质的厚度各为多少？

1－4　用双层电介质制成的同轴电缆如题 1－4 图所示；介电常数 $\varepsilon_1=4\varepsilon_0,\varepsilon_2=2\varepsilon_0$；内、外导体单位长度上所带电荷分别为$\tau$ 和 $-\tau$。

(1) 求两种电介质中以及 $\rho<R_1$ 和 $\rho>R_3$ 处的电场强度与电通密度；

(2) 求两种电介质中的电极化强度；

(3) 问何处有极化电荷，并求其密度。



题 1－4 图

1－5　一平行板电容器，极板面积 $S=400\ \text{cm}^2$，两板相距 $d=0.5$ cm，两板中间的一半厚度为玻璃所占，另一半为空气。已知玻璃的 $\varepsilon_r=7$，其击穿场强为 60 kV/cm，空气的击穿场强为 30 kV/cm。当电容器接到 10 kV 的电源上时，会不会被击穿？

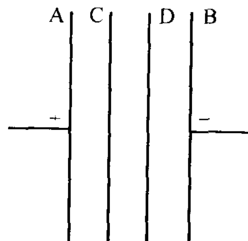
1－6　有一平行板电容器，两极板距离 AB $=d$，中间平行地放入两块薄金属片 C、D，且 AC = CD = DB $=d/3$（见附图），如将 AB 两板充电到电压 U_0 后，拆去电源，问：

(1) AC,CD,BC 间电压各为多少?C、D 片上有无电荷？AC,CD,DB 间电场强度各为多少？

(2) 若将 C、D 两片用导线联结，再断开，重答(1)问；

(3) 若充电前先联结 C、D，然后依次拆去电源和 C、D 的联结线，再答(1)问；

(4) 若继(2)之后，又将 A、B 两板用导线短接，再断开，重新回答(1)中所问。



题 1－6 图

1－7　半径为 b 的无限长圆柱中，有体密度为 ρ_0 的电荷，与它偏轴地放有一半径为 a 的无限长圆柱空洞，两者轴线距离为 d，如附图所示。求空洞内的电场强度(设在真空中)。(提示：可应用叠加原理)

1-8　对于空气中下列各种电位分布，分别求电场强度和电荷体密度：

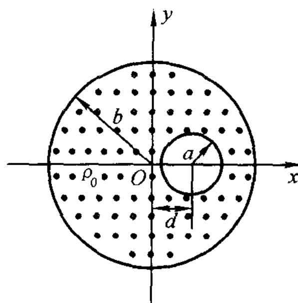
(1) $\varphi = Ax^2$

(2) $\varphi = Axyz$

(3) $\varphi = A\rho^2\sin\phi + B\rho z$

(4) $\varphi = Ar^2\sin\theta\cos\phi$

其中 A 和 B 为常数。



题 1-7 图

1-9　在平行平板电极上加一直流电压 $U_0 = 2$ V，极板间均匀分布着体积电荷 ρ。试应用泊松方程求出极板间任意一点的电位 φ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$。已知 $\rho = -10^{-6}\,\mathrm{C/m^3}$，$\varepsilon = \varepsilon_0$，极板间距离 $d = 5$ mm。

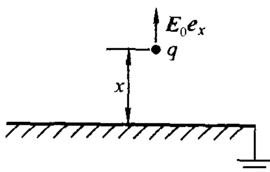
若已知正极板内表面上电荷面密度为 σ（U_0 未知），又该如何求解？

1-10　半径为 a 的圆柱形导体管，管壁由互相绝缘的两个半圆柱面合并而成。设上半个圆柱面的电位是 V_0，下半个圆柱面的电位是零。求导体管内的电位函数。

1-11　参阅附图，在真空的均匀电场（$E_0\,\boldsymbol{e}_x$）中，离接地的导电平面 x 远处有一正点电荷 q_0。问：

(1) 要使该点电荷所受之力为零，x 应为何值？

(2) 如点电荷原先置于(1)所得 x 值一半处，要使该电荷向 $x = +\infty$ 运动，所需最小初速为多少？



题 1-11 图

1-12　在离半径为 R 的导体球心为 d 处($d > R$)有一电荷 q。问要在球上加多少电荷才能使作用在电荷 q 上的力为零？

1-13　一点电荷 q 放置在内表面半径为 b，厚度为 c 的导体球壳内，点电荷与球心的距离为 a。分别求在球壳接地和不接地的两种情况下点电荷所受的力。

1-14　在一半径为 a 的空心导体圆柱中（无限长、接地）放一线电荷（线电荷密度为 τ）。此线电荷与圆柱轴线平行相距为 d。求圆柱内任意点的电位。

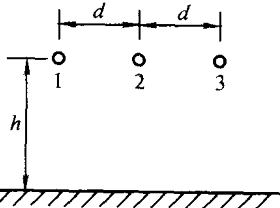
1-15　一半径为 a 的球壳，同心地置于半径为 b 的球壳内，外壳接地。一点电荷放在内球内距其球心为 d 处。问大球内各点的电位为多少？

1-16　空气中平行地放置两根长直导线，半径都是 6 cm，轴线间距离为 20 cm，若导线间加电压 1 000 V，求(1)电场中的电位分布；(2)导线表面电荷密度的最大值及最小值。

1-17　三条输电线位于同一水平面上，导体半径皆为 $r_0 = 4$ mm，距地面高度 $h = 14$ m，线间距离 $d = 2$ m。其中导线 1 接电源，对地电压为 $U_1 = 110$ kV，如题 1-17 图所示：

(1) 导线 2，3 未接至电源，但它们由于静电感应作用也有电压。问其电压各为多少？

(2) 若将导线 2 接地，问导线 2 上的电荷与导线 3 对地电压分别为多少？



题 1-17 图

(3) 此时，若切断接地线，然后断开电源，问三根线对地

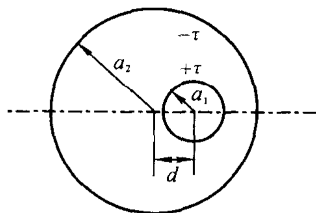
的电压为多少？

1－18　空气中，相隔 1 cm 的两块平行导电平板充电到 100 V 后脱离电源，然后将一厚度为 1 mm 的绝缘导电片插入两板间，问：

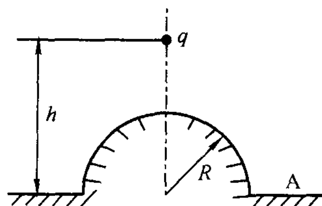
（1）忽略边缘效应，导电片吸收了多少能量？这部分能量起到了什么作用？两板间的电压和电荷的改变量各为若干？最后储存在其中的能量多大？

（2）如果电压源一直与两平行导电平板相联，重答前问。

1－19　求题 1－19 图所示带等量异号电荷的偏心圆柱导体间的电场。已知其间电介质的介电常数为 ε，尺寸 a_1，a_2 和 d 亦给定。



题 1－19 图



题 1－20 图

1－20　点电荷 q 置于导体 A 附近，导体有半球形凸起，如题 1－20 图所示。已知 q，h，R。求此点电荷所受的力。

1－21　真空中半径为 R 的导体球带有电荷 q_1；球外有一点电荷 q_2，距球心 d。若 q_1 与 q_2 均为正电荷，问导体球与点电荷 q_2 是否可能相吸引？为什么？

第二章 恒定电场

本章主要讨论导电媒质中的恒定电场(通常又称恒定电流场)。

首先介绍各种形式的电流密度及其相应的元电流段。随后讨论欧姆定律的微分形式、焦耳定律的微分形式及维持恒定电场所需的电源。

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是恒定电场的主要场量。在分别研究 $\boldsymbol{E}$ 的回路线积分和 $\boldsymbol{J}$ 的闭合面积分之后，得出导电媒质中恒定电场(电源外)的基本方程

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \quad 和 \quad \oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

根据上列积分形式的基本方程，导得不同媒质分界面上的衔接条件。在微分形式基本方程 ($\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ 和 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$) 的基础上，导得拉普拉斯方程。

把无电荷分布区域的静电场与电源外导电媒质中的恒定电场相对比，两者有相似的关系，从而引出静电比拟。

最后介绍电导与接地电阻、跨步电压和危险区半径的计算。

§2-1 导电媒质中的电流

上一章讨论的是对于观察者没有相对运动的电荷所引起的电场。在静电场中，导体内电场强度为零，导体内部也没有电荷的运动。若在外电场的作用下，自由电荷定向运动则形成电流。在导电媒质(如导体、电解液等)中，电荷的运动形成的电流称为传导电流。在自由空间(如真空等)中，电荷的运动形成的电流称为运流电流。本节主要讨论导电媒质中的电流。

单位时间内通过某一横截面的电荷量，称为电流强度(简称电流)，记作 I

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{2-1}$$

在 SI 中，单位是 A(安)。它只描述了每秒通过某一面积的电荷总量。从场的观点来看电流强度是一个通量概念的量，它没有说明电荷在导体截面上每一点流动的情况。为了描述导体中每一点处电荷运动的情况，引入电流密度这个物理量。

2.1.1 电流密度和元电流

电流按分布的情况可分为体电流、面电流、线电流。电荷在空间某一体积

内流动形成体电流。在某个面积上流动形成面电流。当电荷沿一根截面积等于零的几何曲线流动时，形成线电流。

当按体密度 ρ 分布的电荷,以速度 $\boldsymbol{v}$ 作匀速运动时,形成电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$,且表示为

$$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v} \tag{2-2}$$

单位是 A/m^2 (安/米^2)，故又称为电流面密度。它描述了某点处通过垂直于电流方向的单位面积上的电流。由此可知，通过任一面积元 dS 的电流为

$$dI = \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-3}$$

流过任意面积 S 的电流为

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2-4}$$

若按面密度 σ 和线密度 τ 分布的电荷,以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动(设面电荷在其所分布的面上运动,线电荷沿其所分布的线上运动)，就分别形成电流线密度矢量 $\boldsymbol{K}$ ($= \sigma\boldsymbol{v}$) 和线电流 I ($= \tau v$) 。其单位分别为 A/m (安/米) 和 A (安) 。其中电流线密度描述在该面上某点处,通过垂直于电流方向单位宽度的电流。由此可知,通过该面上某点元线段 dl 的电流为

$$dI = (\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{e}_n)\, dl \tag{2-5}$$

(2-5)式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为垂直于元线段 dl 的方向上的单位矢量。这样，流过任意线段 l 的电流为

$$I = \int_l (\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{e}_n)\, dl \tag{2-6}$$

由此可见，电流密度的概念应用得更为广泛。一般把电流密度矢量在各处都不随时间而变化的电流称为恒定电流。

如有元电荷 dq 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,则 $\boldsymbol{v}dq$ 这一个量的单位为 $C \cdot m/s = A \cdot m$,称之为元电流段。因此,可以得到作不同分布的元电荷运动后形成的元电流段。例如,与作体分布的元电荷 ρdV 相应的元电流段为 $\boldsymbol{J}dV$ ($= \rho\boldsymbol{v}dV$) ,与作面分布的元电荷 σdS 相应的元电流段为 $\boldsymbol{K}dS$ ($= \sigma\boldsymbol{v}dS$) ,与作线分布的元电荷 τdl 相应的元电流段为 $Id\boldsymbol{l}$ ($= \tau\boldsymbol{v}dl = \tau v d\boldsymbol{l}$) 。综合上述，元电流段有下列不同形式：

$$\boldsymbol{v}dq \qquad \boldsymbol{J}dV \qquad \boldsymbol{K}dS \qquad Id\boldsymbol{l} \tag{2-7}$$

2.1.2 欧姆定律的微分形式

要在导电媒质中维持恒定电流，必须存在一个恒定电场。因此，电流密度矢量与电场强度矢量一定存在某种函数关系。

由电路理论知，导体两端的电压与流过它的电流成正比

$$U = IR \tag{2-8}$$

上式称为欧姆定律，其中 R 是导体的电阻。对于均匀截面的导体有

$$R = \frac{l}{\gamma S} \tag{2-9}$$

式中 γ 为电导率，单位是 S/m（西/米）。γ 的倒数称为电阻率，用 ρ_r 表示，单位是 Ω·m（欧·米）。

在场论中，对各向同性导电媒质中任意点，选一段元电流管，其长度为 $\mathrm{d}l$，管的横截面积 $\mathrm{d}S$ 在此长度上可认为是均匀的，如图 2－1 所示。流过该管的电流为

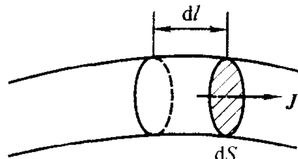


图 2－1 元电流管

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\mathrm{d}l$ 段两端的电压为 $\mathrm{d}U$，$\mathrm{d}U = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。利用欧姆定律(2－8)式有

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \frac{\mathrm{d}l}{\gamma \mathrm{d}S}$$

因为 $\mathrm{d}l$ 的方向就是 $\mathrm{d}S$ 的法线方向，所以得

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} \tag{2-10}$$

这就是欧姆定律的微分形式。它给出了导电媒质中任一点的电流密度与电场强度间的关系。此式虽是从恒定情况下导出的，但对非恒定情况也适用。

2.1.3 焦耳定律的微分形式

自由电荷在导电媒质内移动时，不可避免地会与其它质点发生碰撞。如金属导体中自由电子在电场力作用下定向运动时，会不断与原子晶格发生碰撞，将动能转变为原子的热振动，造成能量损耗。因此，如果要在导体内维持恒定电流，必须持续地对电荷提供能量，这些能量最终都转化为热能。下面介绍功率密度的表达式。

设导体每单位体积内有 N 个自由电子，它们的平均速度为 $\boldsymbol{v}$，则(2－2)式可写成

$$\boldsymbol{J} = N(-\mathrm{e})\boldsymbol{v} \tag{2-11}$$

如导体中存在电场强度 $\boldsymbol{E}$，则每一电子所受的电场作用力是 $\boldsymbol{f} = -\mathrm{e}\boldsymbol{E}$。在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电场力对每一电子所作的功是

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\mathrm{e}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$$

移动元体积 $\mathrm{d}V$ 内的所有电子，需要作功

$$\mathrm{d}A = (N\mathrm{d}V)\mathrm{d}A_{\mathrm{e}} = N(-\mathrm{e})\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V\mathrm{d}t$$

考虑到(2－11)式，上式又可写成

$$\mathrm{d}A = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}V\mathrm{d}t \tag{2-12}$$

(2－12)式给出了在 $\mathrm{d}t$ 时间内，导体每一元体积 $\mathrm{d}V$ 内，由于电子运动而转换

成的热能，从而可得到功率密度

$$p=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}=\frac{\mathrm{d}A/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}V}=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2-13}$$

(2-13)式即焦耳定律的微分形式。p 的单位是 $\mathrm{W/m^3}$（瓦/米^3）。表示导体内任一点单位体积的功率损耗与该点的电流密度和电场强度间的关系。电路理论中的焦耳定律(积分形式为 $P=I^2R$)可由它积分而得。

习 题 (2-1)

2-1-1 直径为 2 mm 的导线，如果流过它的电流是 20 A，且电流密度均匀，导线的电导率为$\frac{1}{\pi}\times10^8$ S/m。求导线内部的电场强度。

2-1-2 已知 $\boldsymbol{J}=(10y^2z\boldsymbol{e}_x-2x^2y\boldsymbol{e}_y+2x^2z\boldsymbol{e}_z)\ \mathrm{A/m^2}$。求穿过 $x=3$ m处，2 m$\leqslant y\leqslant$ 3 m，3.8 m$\leqslant z\leqslant$5.2 m 面积上在 $\boldsymbol{e}_x$ 方向的总电流 I 。

2-1-3 平行板电容器板间距离为 d，其中媒质的电导率为 γ，两板接有电流为 I 的电流源，测得媒质的功率损耗为 P。如将板间距离扩为 $2d$，其间仍充满电导率为 γ 的媒质，则此电容器的功率损耗是多少?

§ 2-2 电源电动势与局外场强

焦耳定律说明恒定电流通过导电媒质，将电能转化为热能而损耗。所以，要在导电媒质中维持一恒定电场从而维持一恒定电流，必须将导电媒质与电源相接，由电源不断地提供维持电流流动所需的能量。下面介绍电源的电动势与局外场强概念。

2.2.1 电源电动势与局外场强

电源[①]是一种能将其它形式的能量(机械能、化学能、热能等)转换成电能的装置，它能把电源内导体原子或分子中的正负电荷分开，使正负电极之间的电压维持恒定，从而使与它们相联结的(电源外)导体之间的电压也恒定，并在其周围维持一恒定电场。电源中能将正负电荷分离开来的力 f_e 称为局外力，把作用于单位正电荷上的局外力 f_e/q 设想为一等效场强，称为局外场强，并用 $\boldsymbol{E}_e$ 表示。其方向由电源的负极指向正极。这样，从场的角度，可用局外场强来描述电源的特性，电源的电动势 $\mathscr{E}$ 与局外场强的关系为

$$\mathscr{E}=\int_l \boldsymbol{E}_e\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2-14}$$

① 这里论及的是直流电源的情况。

在电源内部，除了由两极上电荷所引起的库仑电场强度 $\boldsymbol{E}$ 以外，还有局外场强 $\boldsymbol{E}_e$，因此其中的合成场强应为两者之和即 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_e$。应该注意，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{E}_e$ 是反向的，前者由正极指向负极，后者则由负极指向正极，如图 2－2 所示。因此，通过含源导电媒质的电流为

$$\boldsymbol{J}=\gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_e) \tag{2-15}$$

在电源以外区域中，则只存在库仑电场。产生库仑场强 $\boldsymbol{E}$ 的不是静止电荷，而是处于动态平衡下的恒定电荷。

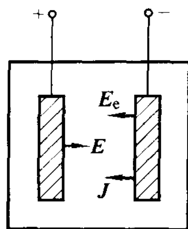


图 2－2　电源

2.2.2　恒定电场

对于恒定电场应分别考虑两种情况：一种是导电媒质中的恒定电场，这是本章要讨论的主要内容；另一种是通有恒定电流的导体周围电介质或空气中的恒定电场。由于电介质中的恒定电场是由其分布不随时间变化的导体上电荷引起的，因此这类电场也是保守场，可以用电位函数表征其特性，用解静电场问题相同的方法处理。虽然严格地说，导体中如通有电流，导体就不是等位体，它的表面也就不是等位面。可是在很多实际问题中，紧挨导体表面的电介质内电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切线分量，较其法线分量小得多，往往可以忽略不计。这样一来导体表面上的边界条件就可认为与静电场中的相同。因此，在研究有恒定电流通过的导体周围电介质中的恒定电场时，就可以应用相应的静电场问题的解答。所以，这里将着重讨论电源以外导电媒质内的恒定电场。

§2－3　恒定电场基本方程·分界面上的衔接条件

本节介绍恒定电场的基本方程，并在积分形式的基本方程基础上研究不同媒质分界面两侧场量间的关系，导出分界面上的衔接条件。

2.3.1　电流连续性方程

根据电荷守恒定律，由任一闭合面流出的传导电流，应等于该面内自由电荷的减少率。写成式子为

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\partial q}{\partial t} \tag{2-16}$$

这就是电流连续性方程(积分形式)的一般形式。

要确保导电媒质中的电场恒定，任意闭合面内不能有电荷的增减(即 $\partial q/\partial t=0$)，否则就会导致电场的变化。也就是说，要在导电媒质中维持一

恒定电场，由任一闭合面(净)流出的传导电流应为零。这样，(2-16)式就变成

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (2-17)$$

上式即恒定电场中的传导电流连续性方程。

2.3.2 电场强度的环路线积分

先设所取积分路线经过电源。考虑到在电源内的合成场强为 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_e$，因此电场强度矢量的环路线积分为

$$\oint_l (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_e) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \oint_l \boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 + \mathscr{E}$$

可见

$$\oint_l (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_e) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathscr{E} \qquad (2-18)$$

如果所取积分路线不经过电源，由于整个积分路线上只存在库仑场强，故有

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad (2-19)$$

2.3.3 恒定电场的基本方程

导电媒质(电源外)中积分形式的恒定电场基本方程是上面所得(2-17)式和(2-19)式，即

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

它们表征导电媒质中恒定电场的基本性质。

由高斯散度定理和斯托克斯定理，以上两式可以写成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad (2-20)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \qquad (2-21)$$

这是导电媒质(电源外)中微分形式的恒定电场基本方程。它说明电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的旋度等于零，恒定电场仍为一个保守场。同时说明 $\boldsymbol{J}$ 线是无头无尾的闭合曲线，因此恒定电流只能在闭合电路中流动。电路中只要有一处断开，电流就不能存在。

电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 间的关系为

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} \qquad (2-22)$$

2.3.4　分界面上的衔接条件

在两种不同导电媒质分界面上，由于物性发生突变，场量也会随之突变，故必须补充适合于分界面上的衔接条件。由于电源以外区域的恒定电场与无体积电荷分布区域的静电场的基本方程的相似性，恒定电场分界面上的衔接条件的推导也与静电场相仿。

设在分界面上无局外场存在，则根据 $\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，可以得到

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2-23}$$

说明电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在分界面上的切线分量是连续的。

再根据 $\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$，可以得到

$$J_{1n} = J_{2n} \tag{2-24}$$

说明电流密度 $\boldsymbol{J}$ 在分界面上的法线分量是连续的。

如果媒质是各向同性的，即 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 的方向一致，如图 2－3 所示，则(2－23)式和(2－24)式可分别写成

$$E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2$$

$$\gamma_1E_1\cos\alpha_1 = \gamma_2E_2\cos\alpha_2$$

两式相除即得

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{2-25}$$

这就是恒定电场中电场强度矢量线和电流密度矢量线的折射定律。折射情况如图 2－3 所示。

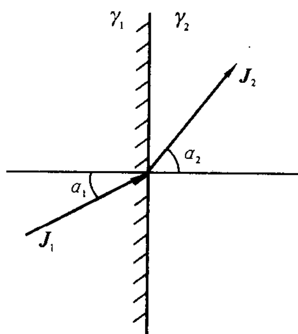


图 2－3　电流线的折射

若第一种媒质是良导体，第二种媒质是不良导体，即 $\gamma_1 \gg \gamma_2$。除 $\alpha_1 = 90°$ 外，在其它情况下，不论 α_1 大小如何，即不论良导体中电流密度线与导体表面成什么角度，α_2 一定很小。也就是说，在靠近分界面处，不良导体内的电流密度线可近似看成与分界面的法线平行。例如，钢($\gamma_1 = 5\times10^6$ S/m) 与土壤($\gamma_2 = 10^{-2}$ S/m) 的分界面上，当 $\alpha_1 = 89°59'50''$ 时 $\alpha_2 = 8''$。这说明电流由良导体进入不良导体内，电流密度线是与良导体表面相垂直的，如图 2－4 所示，可近似地将分界面视为等位面。

在被理想介质包围的载流导体表面上，由于理想介质的电导率为零($\gamma_2 = 0$)，理想介质中不存在恒定电流，即 $\boldsymbol{J}_2 = 0$，由(2－24)式可知 $J_{1n} = J_{2n} = 0$。又因为 $J_{1n} = \gamma_1E_{1n}$，则 $E_{1n} = 0$。说明导体一侧只能存在切线分量的电流和切线分量的电场强度，即 $E_1 = E_{1t} = \dfrac{J_{1t}}{\gamma_1} = \dfrac{J_1}{\gamma_1}$。因此一根细导线上通有恒定电流

时，不论导线如何弯曲，导线内的电流线也将是同样的弯曲。

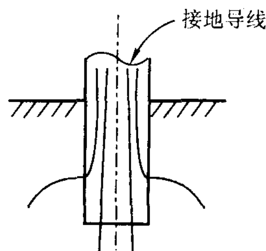


图 2-4 接地导体附近电流线分布

进一步分析可以得知，理想介质中 $\boldsymbol{J}_2=0$，但在理想介质中电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 并不为零。因为 $\boldsymbol{J}_2=\gamma_2\boldsymbol{E}_2$，$\gamma_2=0$，$\boldsymbol{J}_2=0$，所以 $\boldsymbol{E}_2$ 不一定等于零。如前所述，导体周围电介质中的恒定电场可以应用相应的静电场问题的推导结果，分界面上应满足 $D_{2n}-D_{1n}=\sigma$，$D_{1n}=\varepsilon_1E_{1n}=0$，所以 $\sigma=D_{2n}=\varepsilon_2E_{2n}$。这说明在导体与理想介质分界面上有面积电荷分布。现在通过一个简单的例子，利用场图给出定性分析。设有一段长直圆柱导线，两端与电源相联接。在圆柱导线内，电流应该均匀分布即电流密度 $\boldsymbol{J}$ 应该与坐标无关。在电源的作用下，两端面上有正负面积电荷产生。由它们单独在导体内所引起的电场不可能是均匀的，如图 2-5(a)所示。要在导体内得到均匀电场，必须抵消导体截面内电场的径向分量，即在导体的侧面应另有电荷分布。这部分电荷单独产生的电场如图 2-5(b)所示。上述两部分电荷在导线内部所引起的电场的轴线方向分量互相增强，而其径向分量互相抵消。两者叠加使导线内得到一个均匀的合成电场，如图 2-5(c)所示。

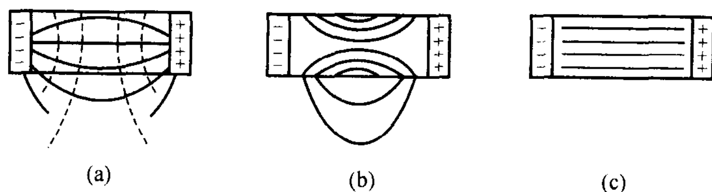


图 2-5 载流导体表面的电荷分布

在导线外理想介质中不仅电场强度的法线分量存在，而且由(2-23)式 $E_{2t}=E_{1t}\neq0$，即电场强度的切线分量也存在。因此在电介质中紧挨导体表面处的电场强度 $\boldsymbol{E}_2$ 与导体表面不垂直，如图 2-6 所示。

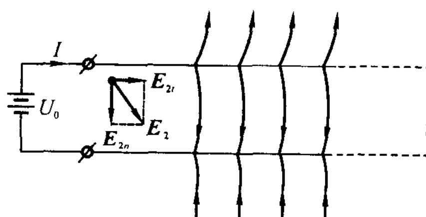


图 2-6 载流导体表面的电场

在两种不同导电媒质的分界面处，设区域 1 的电导率为 γ_1，介电常数为 ε_1，区域 2 的电导率为 γ_2，介电常数为 ε_2，则电位移和电流密度的法线分量的衔接条件分别为

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma \quad 或 \quad \varepsilon_2E_{2n}-\varepsilon_1E_{1n}=\sigma \text{ 和}$$

$$J_{2n}-J_{1n}=0 \quad 或 \quad \gamma_2E_{2n}-\gamma_1E_{1n}=0$$

由此得出，分界面上的电荷面密度为

$$\sigma = \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)E_{2n} = \left(\varepsilon_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - \varepsilon_1\right)E_{1n} \tag{2-26}$$

若 $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$，　则 $\sigma = 0$ 。

根据经典电子理论，在恒定场情况下，可以近似地认为金属导体的介电常数 $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ 。因此，两种不同金属导体分界面上的电荷面密度为

$$\sigma = \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\varepsilon_0 E_{2n} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} - 1\right)\varepsilon_0 E_{1n} \tag{2-27}$$

2.3.5　恒定电场的边值问题

在恒定电场中，由于 $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$,因此电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与标量电位函数 φ 的关系仍然是

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi \tag{2-28}$$

由(2－20)式和(2－22)式，可得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = \nabla \cdot (\gamma \boldsymbol{E}) = \gamma \nabla \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \nabla \gamma = 0$$

对于均匀媒质，应有 $\nabla \gamma = 0$，再将(2－28)式代入，从而得

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{2-29}$$

即恒定电场的电位函数也满足拉普拉斯方程。

在两种不同导电媒质分界面上，由电位函数 φ 表示的衔接条件为

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{2-30}$$

和

$$\gamma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \gamma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \tag{2-31}$$

上述衔接条件与场域边界上所给定的边界条件一起构成了恒定电场的边值条件。很多恒定电场问题的解决，都可归结为在一定条件下求拉普拉斯方程的解答，称之为恒定电场的边值问题。

例 2－1　长直接地金属槽，底面、侧面电位均为零，顶盖电位为 $U_0 \sin \frac{\pi x}{a}$。求槽内导电媒质中的电位分布。

解：如图 2－7 建立坐标系，则槽内待求恒定电场的边值问题为

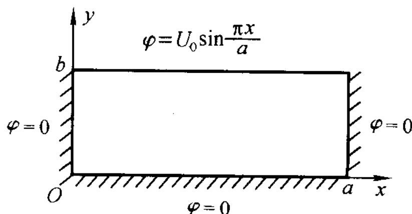


图 2－7　接地金属槽

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad (0\leqslant x\leqslant a \text{、} 0\leqslant y\leqslant b) \\ \varphi\Big|_{\substack{x=0\\0\leqslant y\leqslant b}}=0 \;,\; \varphi\Big|_{\substack{y=0\\0\leqslant x\leqslant a}}=0 \;,\; \varphi\Big|_{\substack{y=b\\0\leqslant x\leqslant a}}=U_0\sin\dfrac{\pi x}{a} \;,\; \varphi\Big|_{\substack{x=a\\0\leqslant y\leqslant b}}=0 \end{cases}$$

根据分离变量法，容易得到该问题的解为

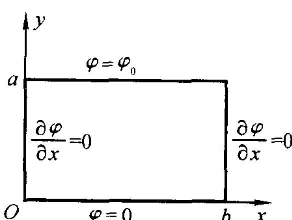
$$\varphi(x,y)=\frac{U_0}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\operatorname{sh}\frac{\pi y}{b}$$

习　题　(2-3)

2-3-1　有恒定电流流过两种不同导电媒质(介电常数和电导率分别为 ε_1、γ_1 和 ε_2、γ_2)的分界面。问若要使两种导电媒质分界面处的电荷面密度 $\sigma=0$,则 ε_1、γ_1 和 ε_2、γ_2 应满足什么条件?

2-3-2　若恒定电场中有非均匀的导电媒质(其电导率 $\gamma=\gamma(x,y,z)$,介电常数 $\varepsilon=\varepsilon(x,y,z)$),求媒质中自由电荷的体密度。

2-3-3　求图示边值条件的矩形导电片中的电位分布(导电片沿 z 方向的厚度很小)。



题 2-3-3 图

§2-4　导电媒质中的恒定电场与静电场的比拟

比较电源外导电媒质中的恒定电场与无电荷分布区域中的静电场，可以看出表征两类场性质的基本方程有相似的形式，由此可以引出一种方法，它在一定条件下，可以把一种场的计算或实验所得的结果，推广应用于另一种场，这种方法称为静电比拟。

为了便于看出两种场的共同点，将两种场对应的物理量列表如表 2-1 所示。

表　2-1

静电场($\rho=0$ 处)	$\boldsymbol{E}$	φ	$\boldsymbol{D}$	q (或 ψ_D)	ε
导电媒质中恒定电场(电源外)	$\boldsymbol{E}$	φ	$\boldsymbol{J}$	I	γ

两种场所满足的基本方程和重要关系式如表 2-2 所示。

表 2-2

静电场($\rho=0$处)	导电媒质中恒定电场(电源外)
$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$(或 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$)	$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$(或 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$)
$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$
$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$
$\nabla^2\varphi=0$	$\nabla^2\varphi=0$
$q=\psi_D=\int_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$I=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

可以看出对应的物理量所满足的方程形式上是一样的，若两个场的边界条件也一样的话，那么只要通过对一个场的求解，再利用对应量的关系进行置换，便可立即得到另一个场的解。

例如，两个相同的导体系。它们分别置于介电常数为 ε 和电导率为 γ 的媒质中,并在导体(电极)间外加电压 U,如图 2-8 所示。两者边界条件相同，形状一样，均匀导电媒质内的恒定电场与均匀介质内的静电场应有相同的场图，即两者等位面的分布一致，且前者的 $\boldsymbol{J}$ 线与后者的 $\boldsymbol{D}$ 线分布一致。若两种场中媒质分片均匀，只要分界面具有相同的几何形状，且满足条件

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \qquad (2-32)$$

则这两种场在分界面处的折射情况仍然一致，相似关系仍成立。

再例如，对于图 2-9 (a)所示两种不同导电媒质中置有电极的问题，也可用镜像法来计算。对于第一种媒质(γ_1)中的电场，可按图 2-9 (b)计算；对于第二种媒质(γ_2)中的电场，可按图 2-9 (c)计算。其中镜像电流 I' 与 I'' 由静电

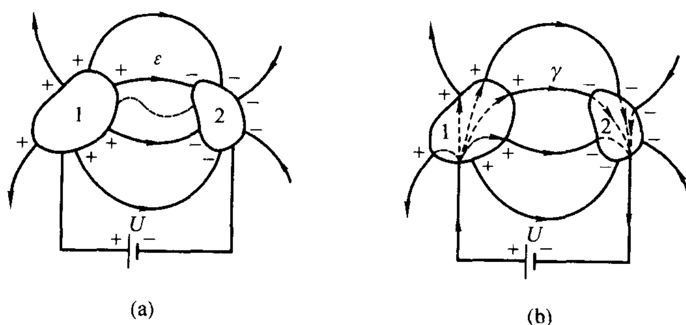


图 2-8　静电比拟

比拟关系，可知为

$$I' = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I \qquad I'' = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I \tag{2-33}$$

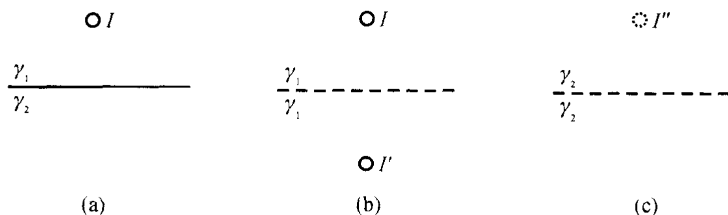


图 2-9 线电流对无限大导电媒质分界平面的镜像

如第一种媒质是土壤，第二种媒质是空气，即 $\gamma_2 = 0$ ，则由上式可得

$$I' = I \qquad I'' = 0 \tag{2-34}$$

在工程实际中，为了避免发生击穿事故，往往需要了解绝缘介质中的电场分布。有些情况下，还必须了解高压电气设备附近的电场强度分布，以确保运行人员的人身安全，这时往往借助于场的模拟实验来解决这些问题。将模型置于注有高电阻率导电溶液的槽中，对其中的恒定电流场进行电位或电场强度的测定，称之为电解槽模拟。它多用于轴对称场的模拟，如高压套管电场，电缆头电场，棒子式绝缘子电场等。

习 题 (2-4)

2-4-1 金属球形电极A和平板电极B的周围为空气时,已知其电容为 C。当将该系统周围的空气全部换为电导率为 γ 的均匀导电媒质,且在两极间加直流电压 U_0 时，求电极间导电媒质损耗的功率是多少?

2-4-2 半径为 a 的长直圆柱导体放在无限大导体平板上方,圆柱轴线距平板的距离为 h,空间充满电导率为 γ 的不良导电媒质。若导体的电导率远远大于 γ,求圆柱和平板间单位长度的电阻。(请用静电比拟法,先求该系统的电容。)

§2-5 电导和部分电导

工程上常常需要计算两电极之间充填的导电媒质(或有损耗绝缘材料)的电导(或漏电导,其倒数又称绝缘电阻)，这也是恒定电场中的一个重要问题。

2.5.1 电导

电导的定义是流经导电媒质的电流与导电媒质两端电压之比，即

$$G = \frac{I}{U} \tag{2-35}$$

当导体形状较规则或有某种对称关系时，可先假设一电流，然后按 $I \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{E} \to U \to G$ 的步骤求得电导。当然也可以先假设一电压，然后按 $U \to \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{J} \to I \to G$ 的步骤求电导。一般情况下，则从解拉普拉斯方程入手来计算电导。当恒定电场与静电场两者边界条件相同时，利用电导计算公式与电容计算公式的相似性，可用静电比拟法，将静电场中各量分别用恒定电场的对应量代换。如

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} = \frac{\varepsilon \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}} = \frac{\gamma \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

两式相比得

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \tag{2-36}$$

故在求电容公式中将 ε 代换为 γ，即得求相应电导的公式，反之亦然。

例 2-2　求同轴电缆的绝缘电阻。设内外导体的半径分别为 R_1、R_2，长度为 l，中间介质的电导率为 γ，介电常数为 ε（如图 2-10）。

解：设电缆的长度 l 远大于截面半径，忽略其端部边缘效应，并设漏电流为 I，则两电极(即内外导体)间任意点 M 的漏电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi\rho l}$$

故电场强度为

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{2\pi\rho l\gamma}$$

内外两导体间的电压

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{2\pi\rho l\gamma}\mathrm{d}\rho = \frac{I}{2\pi l\gamma}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

从而得漏电导

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

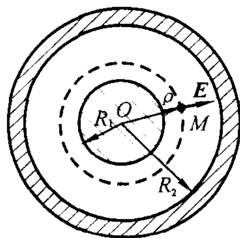


图 2-10　同轴电缆的绝缘电阻

相应的绝缘电阻为

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\gamma l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

也可以应用静电比拟法。在第一章中已求得同轴电缆内、外导体间的电容为

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

故由关系 $\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma}$，得内、外导体间的漏电导为

$$G = \frac{2\pi\gamma l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

相应的绝缘电阻为

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例 2-3　求图 2-11 所示导电片的电导，已给定 $\phi = 0, \varphi = 0; \phi = \theta, \varphi = U_0$。

解：除用上面的解法外，还可从解拉普拉斯方程入手。如图取圆柱坐标系，可以判定电位函数 φ 与 ρ 及 z 无关，这样该导电片内恒定电场的边值问题可写为

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \qquad \varphi\mid_{\phi=0} = 0 \qquad \varphi\mid_{\phi=\theta} = U_0$$

方程的通解为

$$\varphi = C_1\phi + C_2$$

将给定的边界条件代入，可以得到

$$\varphi = \left(\frac{U_0}{\theta}\right)\phi$$

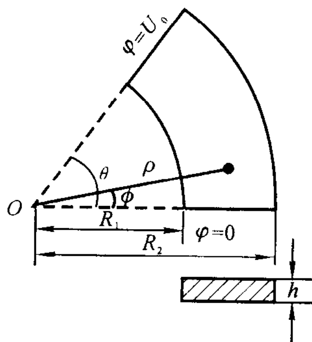


图 2-11　弧形导电片

电场强度　$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial}{\rho\partial}\frac{\varphi}{\phi}\boldsymbol{e}_\phi = -\frac{U_0}{\rho\theta}\boldsymbol{e}_\phi$$

电流密度　$$\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E} = -\frac{\gamma U_0}{\rho\theta}\boldsymbol{e}_\phi$$

电流　$$I = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\gamma U_0}{\rho\theta}\boldsymbol{e}_\phi\cdot h\,\mathrm{d}\rho\,(-\boldsymbol{e}_\phi) = \frac{\gamma h U_0}{\theta}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

最后得导电片的电导　$G = \frac{I}{U_0} = \frac{\gamma h}{\theta}\ln\frac{R_2}{R_1}$。

2.5.2 部分电导

在导电媒质中，对于由三个及三个以上的良导体电极(可看成等位体)组成的多电极系统，任意两个电极之间的电流不仅要受到它们自身间电压还要受其它电极间电压的影响。这时系统中电极间的电压与电流关系不能再仅用一个电导来表示，需将电导的概念加以扩充，引入部分电导概念。

设在线性各向同性导电媒质中有$(n+1)$个排列一定的电极，它们的电流分别为I_0、I_1、…、I_k、…、I_n，且有关系

$$I_0 + I_1 + \cdots + I_k + \cdots + I_n = 0 \tag{2-37}$$

则根据叠加原理得各电极与0号电极间的电压和各电极的电流之间有下列关系

$$\left.\begin{aligned} U_{10} &= R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \cdots + R_{1k}I_k + \cdots + R_{1n}I_n \\ &\vdots \\ U_{k0} &= R_{k1}I_1 + R_{k2}I_2 + \cdots + R_{kk}I_k + \cdots + R_{kn}I_n \\ &\vdots \\ U_{n0} &= R_{n1}I_1 + R_{n2}I_2 + \cdots + R_{nk}I_k + \cdots + R_{nn}I_n \end{aligned}\right\} \tag{2-38}$$

由于受(2－37)式的约束，上式中没有出现I_0。在(2－38)式中，等号右边各项中电流的系数可分为两类：下标相同的如R_{11}、…、R_{kk}、…、R_{nn}，称为自有电阻系数；下标不同的如R_{12}、R_{23}、…、R_{kn}、…等，称为互有电阻系数。电阻系数只和电极的几何形状、尺寸、相互位置及导电媒质的电阻率有关。且$R_{jk}=R_{kj}$。

由(2－38)式求解各电流，可得

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= P_{11}U_{10} + P_{12}U_{20} + \cdots + P_{1k}U_{k0} + \cdots + P_{1n}U_{n0} \\ &\vdots \\ I_k &= P_{k1}U_{10} + P_{k2}U_{20} + \cdots + P_{kk}U_{k0} + \cdots + P_{kn}U_{n0} \\ &\vdots \\ I_n &= P_{n1}U_{10} + P_{n2}U_{20} + \cdots + P_{nk}U_{k0} + \cdots + P_{nn}U_{n0} \end{aligned}\right\} \tag{2-39}$$

其中

$$P_{kk} = \frac{A_{kk}}{\Delta}, P_{kn} = \frac{A_{kn}}{\Delta}$$

这里的Δ是(2－38)式方程组中各电阻系数组成的行列式，A_{kk}是R_{kk}的余因式，A_{kn}是R_{kn}的余因式。P_{kj}称为电导系数。和R_{kj}一样P_{kj}也只和所有电极的几何形状、尺寸，相互位置及导电媒质的电导率有关。由于$R_{kj}=R_{jk}$，可知$P_{kj}=P_{jk}$。另外，下标相同的P_{kk}都是正值，下标不同的P_{kj}都是负值，且P_{kk}大于与它有关的P_{jk}的绝对值。

还可以将方程组(2-39)式改写为另一种形式，以其中第 k 式为例，对式中每一项加减同一量，即有

$$\begin{aligned} I_k &= P_{k1}U_{10} + P_{k2}U_{20} + \cdots + P_{kk}U_{k0} + \cdots + P_{kn}U_{n0} \\ &= -P_{k1}(U_{k0} - U_{10}) - P_{k2}(U_{k0} - U_{20}) - \cdots - P_{kk}(U_{k0} - U_{k0}) - \cdots \\ &\quad - P_{kn}(U_{k0} - U_{n0}) + (P_{k1} + P_{k2} + \cdots + P_{kk} + \cdots + P_{kn})U_{k0} \\ &= -P_{k1}U_{k1} - P_{k2}U_{k2} - \cdots + (P_{k1} + P_{k2} + \cdots + P_{kk} + \cdots + P_{kn})U_{k0} - \cdots \\ &\quad - P_{kn}U_{kn} \\ &= G_{k1}U_{k1} + G_{k2}U_{k2} + \cdots + G_{k0}U_{k0} + \cdots + G_{kn}U_{kn} \end{aligned}$$

式中

$$G_{k1} = -P_{k1}, G_{k2} = -P_{k2}, \cdots, G_{kn} = -P_{kn}$$

$$G_{k0} = P_{k1} + P_{k2} + \cdots + P_{kk} + \cdots + P_{kn}$$

同理，整个方程组可以写为

$$\begin{aligned} I_1 &= G_{10}U_{10} + G_{12}U_{12} + \cdots + G_{1k}U_{1k} + \cdots + G_{1n}U_{1n} \\ &\vdots \\ I_k &= G_{k1}U_{k1} + G_{k2}U_{k2} + \cdots + G_{k0}U_{k0} + \cdots + G_{kn}U_{kn} \qquad (2-40) \\ &\vdots \\ I_n &= G_{n1}U_{n1} + G_{n2}U_{n2} + \cdots + G_{nk}U_{nk} + \cdots + G_{nn}U_{n0} \end{aligned}$$

式中 G_{kj} 称为多电极系统中电极间的部分电导。其中 G_{10}、G_{20}、…、G_{k0}、…、G_{n0} 称为自有部分电导，即各电极与0号电极间的部分电导；而 G_{12}、…、G_{23}、…、G_{kn}、…等称为互有部分电导，即相应两个电极间的部分电导。所有的部分电导都为正值，且 $G_{kj} = G_{jk}$。在 $(n+1)$ 个电极组成的多电极系统中，共应有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个部分电导。图2-12所示的是处在导电媒质中的三个电极与地间的部分电导的示意图。

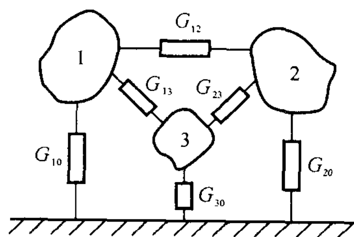


图2-12 部分电导

可以看到，静电系统的部分电容与多电极系统的部分电导两者间可以相互比拟。

2.5.3 接地电阻

工程上常将电气设备的一部分和大地联接，这就叫接地。如果是为了保护工作人员及电气设备的安全而接地，称为保护接地。如果是以大地为导线或为消除电气设备的导电部分对地电压的升高而接地，称为工作接地。为了接地将

金属导体埋入地内，而将设备中需要接地的部分与该导体联接，这种埋在地内的导体或导体系统称为接地体。联接电力设备与接地体的导线称为接地线。接地体与接地线总称接地装置。

接地电阻就是电流由接地装置流入大地再经大地流向另一接地体或向远处扩散所遇到的电阻，它包括接地线和接地体本身的电阻、接地体与大地之间的接触电阻以及两接地体之间大地的电阻或接地体到无限远处的大地电阻。其中前三部分电阻值比最后部分要小得多，因此，接地电阻主要是指后者，即大地的电阻。

计算接地电阻，必须研究地中电流的分布。在分析时，可把接地体看作电极，并以离它足够远处作为零电位点。地中电流的电流线不是散发到无限远，而是汇集在另一电极上或绝缘遭到破坏之处。但是这一情况，对于电极附近的电流分布影响不大，因此对于相应的接地电阻影响很小。这是因为电流流散时，在电极附近电流密度最大，所遇到的电阻也就主要集中在电极附近。

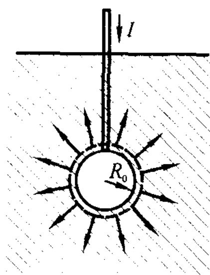


图 2-13　深埋接地导体球的 J 线分布

深埋地中半径为 a 的接地导体球，此时可以不考虑地面的影响，其 J 线的分布如图 2-13 所示。设电流 I 进入土壤达到某点，则该点的 $J=\dfrac{I}{4\pi r^2}$，$E=\dfrac{J}{\gamma}=\dfrac{I}{4\pi\gamma r^2}$，$U_{球\infty}=\int_a^\infty \dfrac{I}{4\pi\gamma r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{I}{4\pi\gamma a}$。接地电阻 $R=\dfrac{U_{球\infty}}{I}=\dfrac{1}{4\pi\gamma a}$。

如果接地球不是深埋地中，这时必须考虑地面的影响，J 线分布将如图 2-14 (a)所示。靠近地面处 J 线将与地面相切。对于这类问题，一般可应用镜像法求解。即可用图2-14 (b)进行计算。显然，实际电极与其镜像所构成系统中流出的电流为实际电极流出电流的两倍，所以实际接地电阻应等于实际电

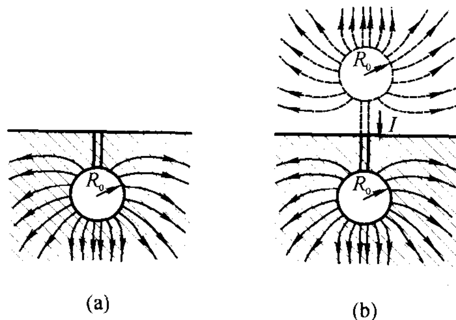


图 2-14　非深埋接地导体球

极与其镜像所构成系统接地电阻的两倍。

例如，对于图 2-15 (a)所示紧靠地面的半球形接地体，应用镜像法得到一个孤立球，并考虑到均匀介质中孤立球的电容 $C=4\pi\varepsilon a$，所以得所求的接地电阻 $R=2\times\frac{1}{4\pi\gamma a}=\frac{1}{2\pi\gamma a}$。

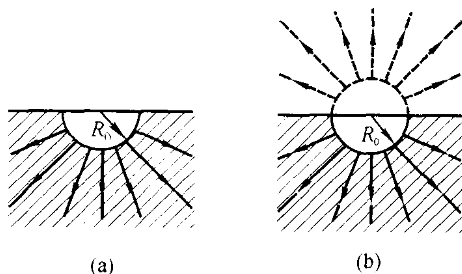


图 2-15 半球形接地体

2.5.4 跨步电压

在电力系统中的接地体附近，由于接地电阻的存在，当有大电流在土壤中流动时，就可能使地面上行走的人的两足间的电压(跨步电压)很高，超过安全值达到对人致命的程度。我们将跨步电压超过安全值达到对生命产生危险程度的范围称为危险区。

这里，先讨论半球形接地体附近地面上的电位分布，然后确定危险区的半径。半球的半径为 a，如图 2-16 所示。如果由接地体流入大地的电流为 I，则在距球心 x 处的电流密度 $J=\frac{I}{2\pi x^2}$，场强 $E=\frac{J}{\gamma}=\frac{I}{2\pi\gamma x^2}$。电位 $\varphi(a)=\int_a^{\infty}\frac{I}{2\pi\gamma x^2}\mathrm{d}x=\frac{I}{2\pi\gamma a}$。电位分布曲线如图 2-16 所示。

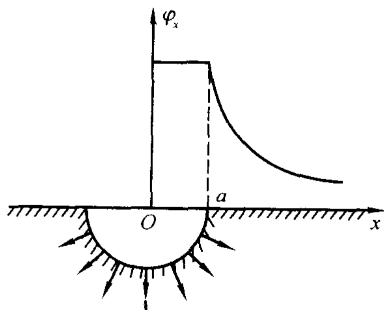


图 2-16 跨步电压

设地面上 A、B 两点之间的距离为b，等于人的两脚的跨步距离。令 A 点与接地体中心的距离为l，接地体中心与 B 点相距$(l-b)$，则跨步电压为

$$U_{BA}=\int_{l-b}^{l}\frac{I}{2\pi\gamma x^2}\mathrm{d}x=\frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{l-b}-\frac{1}{l}\right)$$

若对人体有危险的临界电压为 U_0，当 $U_{BA}=U_0$ 时，A 点就成为危险区的边界，

即危险区是以 O 为中心,以 l 为半径的圆面积。

由
$$U_0 = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{l-b} - \frac{1}{l}\right) \approx \frac{Ib}{2\pi\gamma l^2}$$

即可得
$$l = \sqrt{\frac{Ib}{2\pi\gamma U_0}} \tag{2-41}$$

上式表明了与危险区半径 l 有关的量。

应该指出，实际上直接危及生命的不是电压，而是通过人体的电流。当通过人体的工频电流超过 8 mA 时，有可能发生危险，超过 30 mA 时将危及生命。

习 题 (2-5)

2-5-1 厚度为 d 的法拉弟感应盘的外半径为 R_2,中心孔的半径为 R_1,设圆盘的电导率为 γ, 试证明孔与圆盘外边缘的电阻为

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma d}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

2-5-2 一半径为0.5 m的导体球当作接地电极深埋地下，土壤的电导率 $\gamma = 10^{-2}$ S/m,求此接地体的接地电阻。

提 要

1. 电流是由电荷的有规则运动形成的，不同的电荷分布运动时所形成的电流密度，具有不同的表达式。两种电流密度以及线电流与它们相应的元电流段的表达式，如下表所列。

	电流密度(或线电流)	元 电 流 段
面 密 度	$\boldsymbol{J} = \rho \boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$
线 密 度	$\boldsymbol{K} = \sigma \boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{K}\mathrm{d}S$
线 电 流	$\boldsymbol{I} = \tau \boldsymbol{v}$	$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

电流密度与相应的电流之间，有下列关系

$$I = \int_l (\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{e}_n)\,\mathrm{d}l$$

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

对于传导电流，电流密度与电场强度间的关系为

$$\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$$

2. 导电媒质中有电流时，必伴随有功率损耗，其体密度为

$$p = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$$

因此要在导电媒质中维持一恒定电流，必须与电源相联。电源的特性可用它的局外场强 $\boldsymbol{E}_e$ 表示，$\boldsymbol{E}_e$ 与电源的电动势间的关系为

$$\mathscr{E} = \int \boldsymbol{E}_e \cdot d\boldsymbol{l}$$

3. 导电媒质中恒定电场(电源外)基本方程的积分形式和微分形式分别为

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \qquad \oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

和

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

由微分形式的基本方程可以导得拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

4. 两种不同媒质分界面上的衔接条件是

$$J_{1n} = J_{2n}$$

和

$$E_{1t} = E_{2t}$$

被理想介质包围的载流导体表面，有面积电荷存在。

5. 导电媒质中恒定电场(电源外,即 $\boldsymbol{E}_e = 0$ 处)和静电场(无电荷分布,即 $\rho = 0$ 处)有相似的关系，有关的对应量为

静电场($\rho = 0$ 处)	$\boldsymbol{E}$	φ	$\boldsymbol{D}$	q	ε
恒定电场($E_e = 0$ 处)	$\boldsymbol{E}$	φ	$\boldsymbol{J}$	I	γ

静电比拟法可应用于电场和电路参数的计算以及实验研究中。

6. 电导的计算原则与电容相仿。

接地电阻的计算，要分析地中电流的分布。在电力系统的接地体附近，要注意危险区。

思 考 题

2-1 在恒定电场中，局外场强 $\boldsymbol{E}_e$ 和库仑场强 $\boldsymbol{E}$ 是否都满足保守场的条件？

2-2 恒定电场中的导体，其表面存在自由电荷分布，这些自由电荷是否都是静止不动的？其电荷面密度是否随时间变化？

2-3 恒定电场基本方程的微分形式，表明恒定电场的性质是什么？

2-4 静电比拟的理论依据是什么？静电比拟的条件是什么？

2-5 如果导电媒质不均匀，媒质中的电位是否满足方程 $\nabla^2 \varphi = 0$？

2-6 在两种导电媒质的分界面两侧，在什么条件下 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 具有同一个入射角、折射

角?

2－7　当导电媒质中有恒定电流时，导电媒质外部的电介质中的电场应遵循什么规律?

2－8　由钢($\gamma = 0.6 \times 10^7$ S/m)和铜($\gamma = 5.8 \times 10^7$ S/m)分别制成形状和尺寸都相同的两个接地体，当埋入地中时它们的接地电阻是否相同?

2－9　加有恒定电压的输电线有电流通过与没有电流通过情况下，导线周围介质中的电场有哪些相似与不同?

2－10　在恒定电场中，有下列几种不同情况的边界条件:

(1) 电导率相差极大的两导电媒质的分界面;

(2) 导电媒质与理想介质的分界面;

(3) 两种非理想媒质的分界面。

试问在什么情况下，在分界面哪一侧，电场强度线近似垂直于分界面，什么情况下平行于分界面?

2－11　接地电阻是怎样形成的? 何谓接地装置附近的危险区? 跨步电压与哪些量有关?

2－12　在电流密度 $\boldsymbol{J} \neq 0$ 的地方，电荷体密度是否可能等于零。

习　　题

2－1　电导率为 γ 的均匀、各向同性的导体球,其表面上的电位为 $\varphi_0 \cos\theta$,其中 θ 是球坐标(r,θ,ϕ)的一个变量。试决定表面上各点的电流密度 $\boldsymbol{J}$。

2－2　一半径为 a 的均匀带电球,带电总量为 Q,该球绕直径以角速度 ω 旋转,求:

(1) 球内各处的电流密度 $\boldsymbol{J}$;

(2) 通过半径为 a 的半圆的总电流。

2－3　已知某一区域中在给定瞬间的电流密度 $\boldsymbol{J} = A(x^3\boldsymbol{e}_x + y^3\boldsymbol{e}_y + z^3\boldsymbol{e}_z)$,其中 A 为常数。求:

(1) 此瞬间点(1, －1,2)处电荷密度的变化率$\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$;

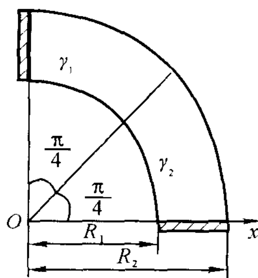
(2) 求此时以原点为球心,a 为半径的球内总电荷的变化率$\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$。

2－4　同轴线内外导体半径分别为 a 和 b,其间充填介质的电导率为 γ,内外导体间的电压为 U_0。求此同轴线单位长度的功率损耗。

2－5　内外导体的半径分别为 R_1、R_2 的圆柱形电容器,中间的非理想介质的电导率为 γ。若在内外导体间加电压 U_0,求非理想介质中各点的电位和电场强度。

2－6　球形电容器的内外半径分别为 R_1、R_2,中间的非理想介质的电导率为 γ。已知内外导体间电压为 U_0,求介质中各点的电位和电场强度。

2－7　有两块不同电导率的薄钢片构成一导电弧片。如附图所示。若 $\gamma_1 = 6.5 \times 10^7$ S/m,$\gamma_2 = 1.2 \times 10^7$ S/m,$R_2 = 45$ cm,$R_1 = 30$ cm,厚度为 2 mm。电极间电压 $U = 30$ V 且 $\gamma \gg \gamma_1$,求:



题 2-7 图

(1) 弧片内的电位分布(设 x 轴上的电极为零电位);

(2) 总电流 I 和弧片电阻 R;

(3) 在分界面上，$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{E}$ 是否突变?

(4) 分界面上的电荷密度 σ。

2-8 如将电极改置于钢片的弧边，重求上题的解。

2-9 两无限大平行金属板，相距 d，板间置有两种导电媒质，分界面亦为平面。第一种媒质(电导率 γ_1,介电常数 ε_1)厚度为 a，第二种媒质(电导率 γ_2,介电常数 ε_2)厚度为 $(d-a)$。已知金属板的电位分别为 φ_1 和 φ_2，试求达到稳定状态时分界面上的电位及电荷密度。

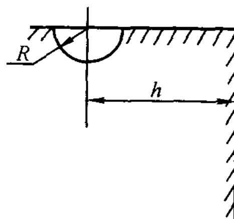
2-10 球形电容器的内半径 $R_1 = 5$ cm,外半径 $R_2 = 10$ cm,其中设有两层电介质,其分界面亦为球面,半径 $R_0 = 8$ cm。若 $\gamma_1 = 10^{-10}$ S/m, $\gamma_2 = 10^{-9}$ S/m 。若内外导体间施加电压 1 kV，求:

(1) 球面之间的 $\boldsymbol{E}$,$\boldsymbol{J}$ 和 φ ;

(2) 漏电导。

2-11 以橡胶作为绝缘的电缆漏电阻是通过下述办法测定的：把长度为 l 的电缆浸入盐水溶液中，然后在电缆导体和溶液之间加电压，从而可测得电流。有一段 3m 长的电缆，浸入溶液后加电压200 V，测得电流为2×10^{-9} A。已知绝缘层的厚度与中心导体的半径相等，求绝缘层的电阻率。

2-12 半球形电极置于一个直而深的陡壁附近(见附图)。已知 $R=0.3$ m，半球中心距陡壁的距离 $h=10$ m，土壤的电导率 $\gamma=10^{-2}$ S/m，求接地电阻。



题 2-12 图

2-13 一个由钢条组成的接地体系统，已知其接地电阻为 100 Ω，土壤的电导率 $\gamma=10^{-2}$ S/m。设有短路电流 500 A 从钢条流入地中，有人正以 0.6 m 的步距向此接地体系统前进，前足距钢条中心 2 m，试求跨步电压。(解题时,可将接地系统用一等效的半球形接地体代替之。)

第三章 恒定磁场

本章讨论恒定电流引起的磁场。首先介绍恒定磁场中最主要的场矢量——磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。在分析真空中磁场的基础上，讨论导磁媒质在恒定磁场中的表现，用磁化后出现的磁化电流考虑其附加作用，并引入磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$。在研究真空及导磁媒质中磁感应强度回路线积分的基础上，引入磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$，并导得安培环路定律$\left(\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I\right)$，它与磁通连续性原理$\left(\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\right)$一起，构成恒定磁场的基本方程(积分形式)。

应用积分形式的基本方程，导得不同媒质分界面上的衔接条件。根据微分形式的基本方程（$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$）分别引入磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 和磁位 φ_{m}，并导得泊松方程($\nabla^2\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J}$) 和拉普拉斯方程($\nabla^2\varphi_{\mathrm{m}} = 0$) 。

本章还介绍通过磁链来计算电感的方法，提到可以由磁场能量计算自感（$L = 2W_{\mathrm{m}}/I^2$）。从场的角度，讨论磁场能量、磁能密度以及它们的计算公式。在磁场力部分，重点讨论应用虚功原理求力的方法，并导得有关计算式。最后，简要介绍磁路的基本定律和恒定磁通磁路的计算。

§3－1 磁感应强度

1820 年丹麦科学家奥斯特发现了通有电流的导线能使附近的磁针发生偏转，即电流的磁效应。说明当导体通有恒定电流时，在其内外还存在着一种称为磁场的特殊形式的物质，这个不随时间变化的磁场即恒定磁场。磁场是统一的电磁场的又一个方面，它的表现是对于引入其中的运动电荷有力相作用。

3.1.1 安培力定律

设 l'、l 为真空中由细导线组成的两个回路，分别通以恒定电流 I'、I。在两回路上选元电流 $I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$、$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向分别对应于 I' 和 I 流动的方向，如图 3－1 所示。$\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}$ 是元电流的位置矢量，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ 是它们的相对位置矢量。通过实验测得电流回路 l' 对电流回路 l 的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\oint_{l'}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{e}_R)}{R^2} \tag{3-1}$$

上式就是真空中的安培力定律，它给出两个电流回路之间的作用力。式中 μ_0 是真空中的磁导率，在 SI 中，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m（亨／米）。

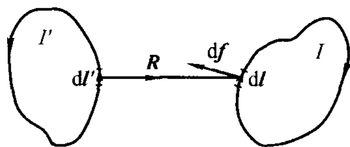


图 3－1 两个电流回路

3.1.2 磁感应强度

(3－1)式可改写为

$$\boldsymbol{F} = \oint_l I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\right) \tag{3-2}$$

从场的观点考虑，(3－2)式括号中的量代表电流 I' 在 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处产生的效应，用 $\boldsymbol{B}$ 表示

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2} \tag{3-3}$$

上式称为毕奥-沙伐定律。$\boldsymbol{B}$ 称为磁感应强度（又称磁通密度），它是表征磁场特性的基本场量，其单位是 T（特斯拉）。在第二章中，曾提到过几种元电流段，除了 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，还有 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$ 和 $\boldsymbol{K}\mathrm{d}S$ 等，相应地，毕奥-沙伐定律还可以分别写为

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z') \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V' \tag{3-4}$$

和

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{K}(x',y',z') \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S' \tag{3-5}$$

若在磁场中有电流强度为 I 的线电流回路，则磁场对该电流回路的作用力可以写为

$$\boldsymbol{F} = \oint_l I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{3-6}$$

这就是一般形式的安培力定律。若有电荷 q，在磁场中以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，则磁场对它的作用力为磁场作用于运动电荷的力，又称洛仑兹力。

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times B \tag{3-7}$$

由上式看出，静止的电荷在磁场中不会受到磁场的作用力，运动的电荷所受到的力总与运动的速度相垂直，它只能改变速度的方向，不能改变速度的量值。因此与库仑力不同，洛仑兹力不作功。

仿照静电场中的 $\boldsymbol{E}$ 线，在恒定磁场中也可以作 $\boldsymbol{B}$ 线。$\boldsymbol{B}$ 线的微分方程应为

$$\boldsymbol{B} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{3-8}$$

例 3－1 计算真空中载电流 I 的长为 $2L$ 的长直细导线在导线外任一点所引起的磁感应强度。

解：导线上恒定电流为 I，考虑到对称性，选择圆柱坐标系，导线与 z 轴重合，坐标原点放在导线中点上，直导线产生的磁场与 ϕ 角无关，如图 3－2 所示。P 点的磁感应强度由(3－3)式可写为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

其中 $I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = I\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_z$，$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$，

$$I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R = I\mathrm{d}z'\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_R = I\mathrm{d}z'\frac{\rho}{R}\boldsymbol{e}_\phi$$

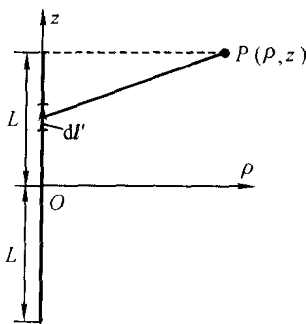


图 3－2　长直细导线

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I\rho}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\mathrm{d}z'}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\\ &= \boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I\rho}{4\pi}\left.\frac{-(z - z')}{\rho^2[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}}\right|_{-L}^{L}\\ &= \boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{4\pi\rho}\left[\frac{z + L}{\sqrt{\rho^2 + (z + L)^2}} - \frac{z - L}{\sqrt{\rho^2 + (z - L)^2}}\right]\end{aligned}$$

式中 ρ 是场点到导线的垂直距离，$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直穿入纸平面，若为无限长载流长直细导线，即 $L \to \infty$，则通过对上式取极限可得

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

在无限长载流直导线所产生的磁场中，容易看出，磁感应强度线是中心在导线轴上而与导线垂直的一些圆。

例 3－2　图 3－3(a)示 $y = 0$ 平面上有恒定电流线密度 $K_0\boldsymbol{e}_z$，求其所产生的磁感应强度。

解：在电流片上取宽为 $\mathrm{d}x$ 的一条，就可以看成是无限长线电流。它引起的磁感应强度已在例 3－1 中讨论过。由于是无限大电流平面，所以选 P 点在 y 轴上，这样在对称地离 P 为 $|x|$ 处取两无限长线电流，它们引起的磁感应强度的 y 分量互相抵消，而 x 分量互相增强。因此，整个面电流分布所产生的合成磁感应强度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{e}_x &= \left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 K_0 \sin\alpha}{2\pi(x^2 + y^2)^{1/2}}\mathrm{d}x\right]\boldsymbol{e}_x\\ &= \left(-\frac{\mu_0 K_0 y}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{e}_x = \left(-\frac{\mu_0 K_0}{2\pi}\arctan\left.\frac{x}{y}\right|_{-\infty}^{+\infty}\right)\boldsymbol{e}_x\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K_0}{2}\boldsymbol{e}_x & y>0 \\ +\dfrac{\mu_0 K_0}{2}\boldsymbol{e}_x & y<0 \end{cases}
$$

B 的分布如图 3-3 (b)所示。

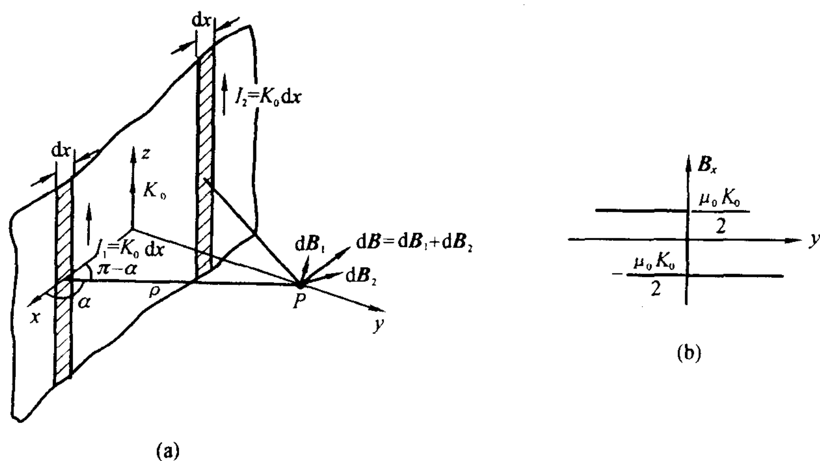
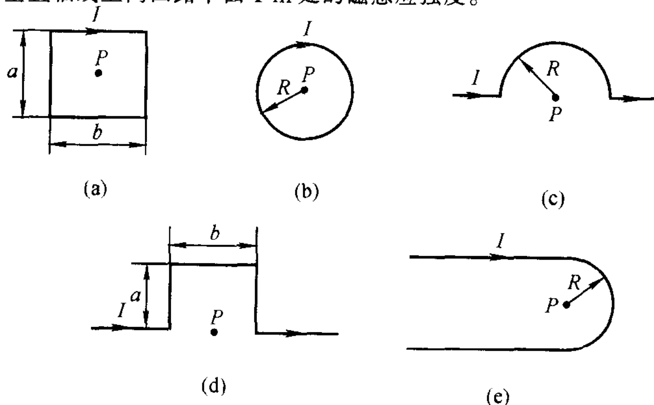


图 3-3 无限大电流片及其 **B** 的分布

习 题 (3-1)

3-1-1 分别求出附图所示各种形状的线电流在真空中的 P 点所产生的磁感应强度。

3-1-2 设在空气中有一个边长分别为 1 m 和 0.5 m 的长方形回路，通以电流 $I=4$ A,求其中心垂直轴线上离回路平面 1 m 处的磁感应强度。



题 3-1-1 图

3-1-3 两平行放置无限长直导线分别通有电流 I_1 和 I_2，它们之间距离为 d。分别求两导线单位长度所受的力。

§3-2 安培环路定律

本节首先介绍真空中的安培环路定律，考虑到媒质的磁化，引入磁场强度 $\boldsymbol{H}$，得到一般形式的安培环路定律，并据此定义媒质的磁导率。

3.2.1 真空中的安培环路定律

在真空中，若磁场是一根无限长载流 I 的直导线引起的，根据例 3-1 可知，距离导线 ρ 远处的磁感应强度 $B=\mu_0 I/2\pi\rho$。在垂直于导线的任一平面内取一闭合回路 l 作为积分路径，如图 3-4 所示。积分路径上的元长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，到导线的距离为 ρ，对轴线所张的角是 $\mathrm{d}\phi$，且与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 α，则 $\rho\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}l\cos\alpha$。这样

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\rho\mathrm{d}\phi=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=\mu_0 I \quad (3-9)$$

如果积分回路没有与电流交链，如图 3-5 所示，则因 $\int_0^0 \mathrm{d}\phi=0$，从而 $\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$。

如果积分路径所交链的电流不止一个，如图 3-6 所示，显然应有

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0(I_1+I_2-I_3)$$

综上所述，在真空的磁场中，沿任意回路取 $\boldsymbol{B}$ 的线积分，其值等于真空的磁导率乘以穿过该回路所限定面积上的电流的代数和。即

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_{k=1}^{n} I_k \quad (3-10)$$

上式就是真空中的安培环路定律。式中电流 I_k 的正负，决定于电流的方向与积分回路的绕行方向是否符合右手螺旋关系，符合时为正，否则即为负。

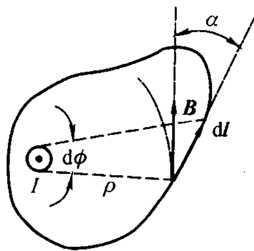


图 3-4

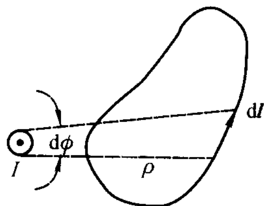


图 3-5

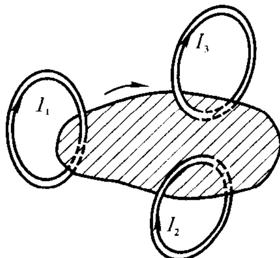


图 3-6

对于具有对称性的磁场分布，应用安培环路定律可以使 $\boldsymbol{B}$ 的计算变得很简单。此时应恰当地选择积分路径，使积分路径上每一点的 $\boldsymbol{B}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向间具有同一夹角，且 $\boldsymbol{B}$ 的量值相等。下面举例说明安培环路定律的应用。

例 3-3 图 3-7(a)示一根无限长同轴电缆的截面，芯线通有均匀分布的电流 I，外皮通有量值相同但方向相反的电流，试求各部分的磁感应强度。

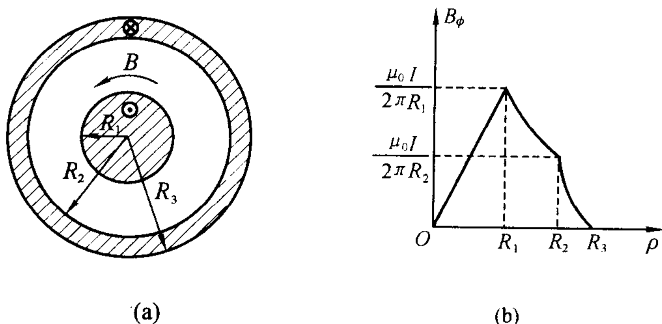


图 3-7 同轴电缆的磁场

解：这是一个平行平面磁场，磁场的分布与电缆的长度无关，也和 ϕ 角无关。根据图中给定的电流方向，用右手螺旋法则判断 B 线应是反时针方向的同心圆。

当 $\rho < R_1$ 时，内导体中电流密度 $J = \dfrac{I}{\pi R_1^2}$，取一圆周为积分回路，则穿过圆面积的电流 I' 为

$$I' = \frac{I}{\pi R_1^2}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = I\frac{\rho^2}{R_1^2}$$

根据(3-10)式

$$\int_0^{2\pi} B_\phi \rho\,\mathrm{d}\phi = \mu_0\frac{I\rho^2}{R_1^2} \qquad 或 \qquad B_\phi\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = \mu_0\frac{I\rho^2}{R_1^2}$$

得

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R_1^2}$$

当 $R_1 < \rho < R_2$ 时，以 ρ 为半径取一圆周为积分回路，应用(3-10)式，得

$$\int_0^{2\pi} B_\phi\rho\,\mathrm{d}\phi = \mu_0 I$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

当 $R_2 < \rho < R_3$ 时，采用同样的方法，这时穿过半径为 ρ 的圆面积的电流为

$$I' = I - I\frac{\rho^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

应用(3－10)式，可得

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\frac{R_3^2 - \rho^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

对于电缆外（$\rho > R_3$ 处），$I' = 0$，则 $B_\phi = 0$。B_ϕ 随 ρ 变化的曲线，见图 3－7(b)。

例 3－4　求具有恒定电流线密度 $\boldsymbol{K}_0$ 的无限大电流片所产生的磁感应强度。

解：如图 3－8 所示，设无限大电流片在 xOz 平面上，电流沿正 z 方向，则电流线密度 $\boldsymbol{K}_0$ 所产生的磁感应强度方向将平行于 x 轴，且在 $y<0$ 处 $\boldsymbol{B}$ 沿 $+\boldsymbol{e}_x$ 方向；$y>0$ 处，$\boldsymbol{B}$ 沿 $-\boldsymbol{e}_x$ 方向。现在 $z=0$ 平面上取一矩形回路，使它的平行于 x 轴的两条边，对称于 x 轴。则应用(3－10)式，有

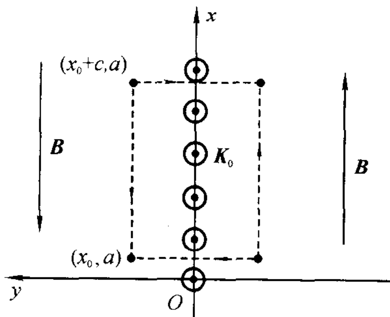


图 3－8　无限大电流片

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{x_0}^{x_0+c} B_{x1}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x dx + \int_{-a}^{a} 0dy + \int_{x_0+c}^{x_0}(-B_{x1}\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x)dx + \int_{a}^{-a} 0dy$$

$$= B_{x1}(x_0 + c - x_0) - B_{x1}(x_0 - x_0 - c)$$

$$= 2B_{x1}c = \mu_0 K_0 c$$

从而得

$$B_{x1} = \frac{\mu_0 K_0}{2}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 K_0}{2}\boldsymbol{e}_x & y>0 \\ +\dfrac{\mu_0 K}{2}\boldsymbol{e}_x & y<0 \end{cases}$$

这一结果与例 3－2 中所得结果相同。

3.2.2　媒质的磁化

一切物质都由分子或原子组成，每一个分子或原子中都有运动的电子，电子不仅绕其自身轴线转动，同时还在一定的轨道上绕原子核运动，把分子或原子看成一个整体，分子或原子中各个电子对外所产生的磁效应的总和，可用一

个等效的环形电流来表示，称为分子电流，又称束缚电流或安培电流。它们不引起电荷的迁移，但它和发生电荷迁移的自由电流一样能产生磁感应强度。

分子电流具有一定的磁矩，称为分子磁矩。一个分子磁矩定义为 $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$，其中 I 是分子电流强度，S 是分子电流围成的面积，$\boldsymbol{S}$ 的方向与电流环绕方向服从右手螺旋关系。

在没有外磁场作用时，由于热运动，分子磁矩排列是随机的，因此总的磁矩等于零，整块物质对外不显磁性。但是，若把物体放入外磁场中，外磁场将对分子磁矩有转矩作用 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{T}$ 为分子磁矩在外磁场$\boldsymbol{B}$ 作用下受到的转矩），可见分子磁矩总是力图使自己的方向与外磁场的方向一致，使得分子磁矩的排列比较有序化。这样，总的磁矩不再等于零，因而整块物质便呈现磁性，这种现象称为物质的磁化，亦称媒质的磁化。

为了描述媒质磁化的状态，定义一个称为磁化强度的矢量，并用 $\boldsymbol{M}$ 表示之。它表示媒质中每单位体积内所有分子磁矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{m}_i}{\Delta V} \tag{3-11}$$

$\boldsymbol{M}$ 的单位是 A/m（安／米）。

媒质的磁化，使媒质中出现了宏观的附加电流，称为磁化电流。为了计算磁化电流，在媒质内任取一块面积 S，其周界为 l，如图 3－9(a) 所示。可以看出，只有分子电流与 S 面相交链时，对 S 面的电流才有贡献。与 S 面相交链的分子电流有两种情况，一种是在面内相交链，分子电流穿入穿出 S 面各一次，它对 S 面的总电流没有贡献；另一种情况是与 S 面的边界线 l 交链的分子电流，它们只通过 S 面一次，因而对 S 面的总电流有贡献。在 S 的边界线 l 上取元长度 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向沿边界线 l 的环绕方向，如图 3－9(b) 所示。在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 附近磁化可看作是均匀的。设分子电流的面积为 $\boldsymbol{a}$，则选以 $\boldsymbol{a}$ 为底，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为轴的圆柱体，柱内的分子均与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 交链，且通过 S 面一次。柱中的分子数为 $N\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$N$ 为单位体积内的分子数。当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的夹角为锐角时，电流沿 S 面的法线流出；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的夹角为钝角时，电流逆 S 面的法线流入，因此圆柱内的分子对 S 面贡献的磁化电流为

$$\mathrm{d}I_{\mathrm{m}} = IN\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = N\boldsymbol{m} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3-12}$$

穿过 S 面的总磁化电流为

$$I_{\mathrm{m}} = \oint_l \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3-13}$$

将 S 面的磁化电流用磁化电流密度$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}$ 表示，则

$$\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

利用斯托克斯定理，则

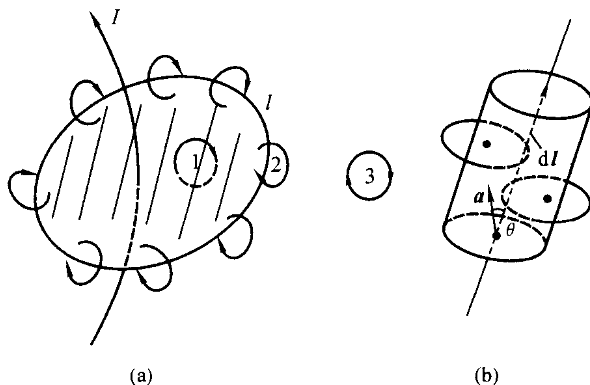


图 3-9 媒质中的磁化电流

$$\int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由于 S 面是任取的，上式要成立只有被积函数相等，即

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{3-14}$$

(3-13)式表示媒质内通过任意面 S 的磁化电流是磁化强度沿该面周界的线积分。(3-14)式表示媒质内任一点的磁化电流密度是该点磁化强度的旋度。

考察两种不同导磁媒质的分界面，由于磁化强度不同，分界面上存在面磁化电流。为此，在媒质分界面上任一点 P 处，取一矩形回路 abcd，ab 和 cd 两边平行于分界面，长度 Δl_1 足够小，使得磁化强度在 Δl_1 上各处可视为相同。令 $\Delta l_2 \to 0$，根据 $\oint_l \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{\mathrm{m}}$，当分界面上存在面磁化电流（磁化电流线密度为 K_{m}）时，则有

$$M_{1t} - M_{2t} = K_{\mathrm{m}} \tag{3-15}$$

磁化电流线密度 K_m 的正负，要看它的方向与 M_{1t} 绕行方向是否符合右手螺旋关系而定。写成矢量形式为

$$(\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2) \times \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}} \tag{3-16}$$

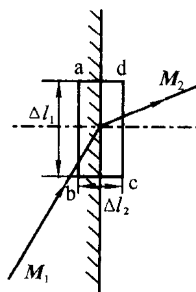


图 3-10 不同媒质的分界面

(3-16)式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为分界面上从媒质 1 指向媒质 2 的法线方向单位矢量。$\boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}$ 表示分界面上垂直于电流方向单位长度横截线上流过的磁化电流。当媒质 2 为真空时，$\boldsymbol{M}_2 = 0$，用 $\boldsymbol{M}$ 表示媒质 1 的磁化强度时，(3-16) 式为

$$\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}} \tag{3-17}$$

这样，要计算有导磁媒质存在时的磁感应强度，只需把磁化电流考虑进去，与通常所称自由电流一起计算它们在真空中产生的磁感应强度即可。

3.2.3 一般形式的安培环路定律

如果在具有导磁媒质的磁场中，任意地取一闭合路径 l，则磁感应强度沿此回路的线积分应为

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 (I + I_m)$$

式中的 I 表示自由电流，I_m 为磁化电流。将(3－13)式代入，则可以写成

$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \left(I + \oint_l \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \right)$$

经过移项整理后，上式可改写为

$$\oint_l \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \qquad (3-18)$$

令

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H} \qquad (3-19)$$

并称 $\boldsymbol{H}$ 为磁场强度，则(3－18)式成为

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \qquad (3-20)$$

应注意到上式中等号右边的 I，是穿过回路 l 所包围面积的自由电流，而不包括磁化电流。

如果穿过回路 l 所限定面积的自由电流不止一个，则

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_k \qquad (3-21)$$

(3－20)和(3－21)式就是一般形式的安培环路定律的表达式。它说明，在磁场中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任一闭合路径的线积分等于穿过该回路所包围面积的自由电流(不包括磁化电流)的代数和。如电流的方向和积分回路的绕行方向符合右手螺旋关系，式中的电流取正号。(3－21)式表明 $\boldsymbol{H}$ 的环路线积分只与自由电流有关，而与磁化电流无关，也就是与导磁媒质的分布无关。但是不能理解为 $\boldsymbol{H}$ 的分布与导磁媒质分布无关。在 SI 中，磁场强度的单位是 A/m (安／米)。

对于各向同性的线性媒质，磁化强度与磁场强度间有正比关系，即

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H} \qquad (3-22)$$

式中 χ_m 称为媒质的磁化率，是一个无量纲的纯数。

根据(3－19)和(3－22)式，可以得到

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$$

或

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \qquad (3-23)$$

(3－23)式中的 μ 是媒质的磁导率。在 SI 中，μ 的单位是 H/m (亨/米)，$\mu_r \left(= \frac{\mu}{\mu_0} \right)$ 称为相对磁导率，是一个纯数。

值得注意，(3－23)式所示关系，仅适用于各向同性的线性导磁媒质①，而(3－19)式则无此限制。

如果产生磁场的电流周围，无限地充满均匀各向同性的导磁媒质，则磁场中各点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的方向，将与同一电流置于无限大真空中同一位置时所产生的一致，而各点的 $\boldsymbol{B}$ 的量值，则增大同一倍数，即增大 μ_r 倍。因此，对于这种特殊情况下磁感应强度的计算，用该导磁媒质的磁导率 μ 去代替 μ_0 即可。

例 3－5　磁导率为 μ，半径为 a 的无限长导磁媒质圆柱，其中心有无限长的线电流 I，圆柱外是空气。求圆柱内外的磁感应强度、磁场强度和磁化强度。

解：先利用安培环路定律求磁场强度。以线电流 I 为轴线，作半径是 ρ 的圆周为安培环路，

当 $\rho > 0$ 时

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi\rho H_\phi = I$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

当 $0 < \rho < a$ 时　$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \dfrac{\mu I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{M} = \dfrac{\mu}{\mu_0}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} = \left(\dfrac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\dfrac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$

当 $\rho > a$ 时　$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi, \boldsymbol{M} = 0$

习　题　(3－2)

3－2－1　一半径为 a 的长直圆柱形导体，被一同样长度的同轴圆筒导体所包围，圆筒半径为 b，圆柱导体和圆筒载有相反方向电流 I。求圆筒内外的磁感应强度（导体和圆筒内外导磁媒质的磁导率均为 μ_0）。

3－2－2　有一半径为 a 的长直圆柱形导体，通有电流密度 $\boldsymbol{J} = J_0 \dfrac{\rho}{a}\boldsymbol{e}_z$ 的恒定电流（z 轴就是圆柱导体的轴线）。试求导体内外的磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

3－2－3　一根截面积为 2 cm^2，长为 10 cm 的圆柱状磁介质被均匀磁化，磁化强度 $\boldsymbol{M} = 2\boldsymbol{e}_x$ A/m，试计算它的磁矩 $\boldsymbol{m}$。

---

① 铁磁性材料是非线性的，因此对于铁磁性材料，其中 χ_m 和 μ 为常数的(3－22)、和(3－23)两式就不再适用。但也可以把(3－23)式作为 μ 的定义方程，这时 $\mu = \mu(\boldsymbol{H})$，表明 μ 是 $\boldsymbol{H}$ 的函数。

§3-3 恒定磁场基本方程·分界面上的衔接条件

通常都是从两个方面来研究矢量场，即计算它通过任何闭合面的通量和它沿任何闭合曲线的线积分。本节将通过分析恒定磁场的通量和环路线积分，得到它的基本方程，并在积分形式的基本方程的基础上导出分界面上的衔接条件。

3.3.1 磁通连续性原理

在磁场中，穿过任一面积 S 的 $\boldsymbol{B}$ 的通量，称为磁通 Φ_{m}。因此

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3-24}$$

在 SI 中，磁通的单位是 Wb（韦[伯]）

实验表明磁感应线是闭合的，既无始端又无终端。这说明自然界中不存在像电荷那样供 $\boldsymbol{E}$ 线发出或终止的磁荷，因此也就没有供 $\boldsymbol{B}$ 线发出或终止的源或沟。这样，对于任意闭合面，都有

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{3-25}$$

上式所表示的磁场性质，又称磁通连续性原理(积分形式)。

利用高斯散度定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V = 0$$

从而有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3-26}$$

这就是磁通连续性原理的微分形式，它表明恒定磁场是一个无散场。如果这一个场的散度恒等于零，则它可能是恒定磁场。

3.3.2 恒定磁场的基本方程

磁通连续性原理和安培环路定律表征了恒定磁场的基本性质。不问导磁媒质分布情况如何，凡是恒定磁场，都具备这两个特性。这里把它们的表达式重新列出

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{3-27}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{3-28}$$

并称它们为恒定磁场的(积分形式的)基本方程。

应用斯托克斯定理于(3-28)式，并用 $\boldsymbol{J}$ 的面积分表示自由电流，得

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

对以 l 为周界的任何面积上式均成立，因此

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{3-29}$$

这就是安培环路定律的微分形式，可见磁场是有旋场。

(3-26)式和(3-29)式一起并称为恒定磁场基本方程的微分形式。可见恒定磁场是无源有旋场。

$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 这两个场量，一般地可由(3-19)式相联系，即

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M}$$

对于各向同性的线性媒质，它们有(3-23)式所示的关系，即

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

3.3.3　分界面上的衔接条件

现在推导磁场强度和磁感应强度在两种不同媒质分界面上必须满足的衔接条件。

在媒质分界面上，围绕任一点 P 取一矩形回路，如图 3-11 所示。令 $\Delta l_2 \to 0$，根据 $\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$，如果分界面上存在面自由电流，则有

$$H_{1t}\Delta l_1 - H_{2t}\Delta l_1 = K\Delta l_1$$

或

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{3-30}$$

还可以写成

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = K \tag{3-31}$$

电流线密度 K 的正负，要看它的方向与沿 H_{1t} 绕行方向是否符合右手螺旋关系而定。写成矢量形式则为 $(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{K}$。其中 $\boldsymbol{e}_n$ 为分界面上从媒质 1 指向媒质 2 的法线方向单位矢量。

如果分界面上无面电流，则

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{3-32}$$

说明在这种条件下，磁场强度的切线分量是连续的，但磁感应强度的切线分量是不连续的。

若在媒质分界面上，包围某点 P 作一扁小圆柱体，如图 3-12，且令 $\Delta l \to 0$，则根据 $\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$，可以得到

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{3-33}$$

还可以写成

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \tag{3-34}$$

写成矢量形式则为 $(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)\cdot\boldsymbol{e}_n=0$。可见，磁感应强度的法线方向分量是连续的，而磁场强度的法线方向分量则不连续。

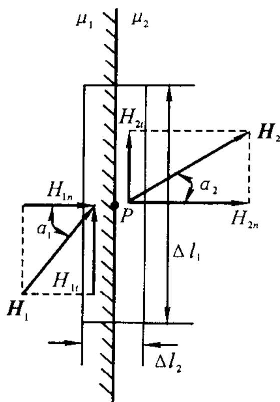


图 3-11 在媒质分界面上应用安培环路定律

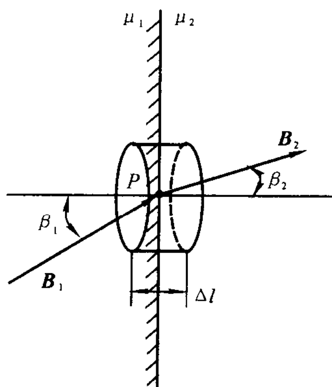


图 3-12 在媒质分界面上应用磁通连续性原理

根据(3-32)和(3-33)两式，并考虑到 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 所示的关系，可以得出如下结论：如两种媒质均为各向同性，这样，图 3-11 和图 3-12 中有 $\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$，则在它们的分界面上(设无电流线密度) $\boldsymbol{B}$ 线和 $\boldsymbol{H}$ 线的折射规律为

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{3-35}$$

上式表明，磁场从第一种媒质进入到第二种媒质时，它的方向要发生折射。例如，当磁感应强度线由铁磁质进入非铁磁质时，由于铁磁质的磁导率较非铁磁质的磁导率大得多，故无论磁感应线在铁磁质中与分界面的法线成什么角度(只要不是 90°)，它在紧挨着分界面的非铁磁质中，都可认为是与分界面相垂直的。如设 $\mu_1=3\,000\mu_0$，则当 $\alpha_1=88^\circ$ 时，在真空中磁感应线与法线的夹角

$$\alpha_2=\arctan\left(\frac{\mu_0}{3\,000\mu_0}\tan 88^\circ\right)=\arctan 0.009\,55=33'$$

例 3-6 设 $y=0$ 平面是两种媒质的分界面。在 $y>0$ 处媒质的磁导率 $\mu_1=5\mu_0$；在 $y<0$ 处，媒质的磁导率 $\mu_2=3\mu_0$。设已知分界面上无电流分布，且 $\boldsymbol{H}_2=(10\boldsymbol{e}_x+20\boldsymbol{e}_y)$ A/m，求 $\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$。

解：对于 $\boldsymbol{B}_2$，可以直接写出

$$\boldsymbol{B}_2=\mu_2\boldsymbol{H}_2=3\mu_0\boldsymbol{H}_2=\mu_0(30\boldsymbol{e}_x+60\boldsymbol{e}_y)\text{ T}$$

由于分界面上无电流线密度($K=0$)，因此

$$H_{1x}=H_{1t}=H_{2t}=10$$

$$B_{1y}=B_{1n}=B_{2n}=60\mu_0$$

可求得 $B_{1x}=\frac{\mu_1}{\mu_2}B_{2x}=\frac{5}{3}(30\mu_0)=50\mu_0 \quad H_{1y}=\frac{\mu_2}{\mu_1}H_{2y}=\frac{3}{5}(20)=12$

因此
$$\boldsymbol{B}_1=\mu_0(50\boldsymbol{e}_x+60\boldsymbol{e}_y)\text{T}$$
$$\boldsymbol{H}_1=(10\boldsymbol{e}_x+12\boldsymbol{e}_y)\text{A/m}$$

习 题 (3-3)

3-3-1 下列矢量中哪些可能是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$? 如果是的,请求相应的电流密度 $\boldsymbol{J}$:

1. $\boldsymbol{F}=K(x\boldsymbol{e}_y-y\boldsymbol{e}_x)$ 2. $\boldsymbol{F}=K(x\boldsymbol{e}_x-y\boldsymbol{e}_y)$

3. $\boldsymbol{F}=K\rho\boldsymbol{e}_\rho$ 4. $\boldsymbol{F}=Kr\boldsymbol{e}_\phi$

3-3-2 在 $\mu_1=1\,500\mu_0$ 和 $\mu_2=\mu_0$ 两种导磁媒质分界面一侧的磁感应强度 $B_1=1.5$ T,与法线方向的夹角为 35°。求分界面另一侧的磁感应强度 B_2 的大小,及它与法线方向的夹角 θ_2。

3-3-3 在恒定磁场中,若两种不同媒质分界面为 xOz 平面,其上有电流线密度 $\boldsymbol{K}=2\boldsymbol{e}_x$ A/m,已知 $\boldsymbol{H}_1=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z)$ A/m,求 $\boldsymbol{H}_2$。

§3-4 磁矢位·恒定磁场的边值问题

在静电场中,由于 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$,曾经引入电位函数来表征静电场的特性,从而使电场的分析计算得到简化。对于恒定磁场,是否也能得到类似的位函数?为了便利磁场的计算,这一节中介绍一个称为磁矢位的位函数,并讨论恒定磁场的边值问题。

3.4.1 磁矢位

静电场由于其无旋性,可以引入电位函数来描述。但是,由于磁场的无散性 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0)$,可以引入一个矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 使

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3-36}$$

显然,上式恒满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\equiv0$。这个矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 称为恒定磁场的磁矢位,亦称矢量磁位。在 SI 中,它的单位是 Wb/m(韦/米)。

由安培环路安律的微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$

同时考虑到各向同性的线性导磁媒质中 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$,因此有

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J} \tag{3-37}$$

再把(3-36)式代入上式,可得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{J}$$

应用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

则 有

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} \tag{3-38}$$

在矢量场中，要确定一个矢量，必须同时知道它的散度与旋度。因此现在必须规定 $\boldsymbol{A}$ 的散度。为了简便，令

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{3-39}$$

上式称为库仑规范条件。这样(3-38)式可写为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{3-40}$$

表明磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 满足矢量形式的泊松方程。它相当于三个标量形式的泊松方程。在直角坐标系中，它们是

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned}\right\} \tag{3-41}$$

这三个方程的形式和静电场电位的泊松方程完全一样。参照静电场中泊松方程的解答形式，当电流分布在有限空间，且规定无限远处磁矢位的量值为零时，(3-41)式中各式的解答分别是

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{J_x \mathrm{d}V'}{R} \\ A_y &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{J_y \mathrm{d}V'}{R} \\ A_z &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{J_z \mathrm{d}V'}{R} \end{aligned}\right\} \tag{3-42}$$

将以上三式合并，即得

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}\mathrm{d}V'}{R} \tag{3-43}$$

前面曾指出，元电流段还有 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{K}\mathrm{d}S$ 形式，因此由这两种电流分布的整个电流引起的磁矢位应为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\mu}{4\pi}\oint_{l'} \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R} \\ \boldsymbol{A} &= \frac{\mu}{4\pi}\int_{S'} \frac{\boldsymbol{K}\mathrm{d}S'}{R} \end{aligned}\right\} \tag{3-44}$$

由(3-43)和(3-44)式可知，每个元电流产生的磁矢位与此元电流有相同的方向。

例 3-7 应用磁矢位分析真空中磁偶极子的磁场。

磁偶极子是指一个面积 dS 很小的任意形状的平面载流回路。d$\boldsymbol{S}$ 的正方向和回路电流的正方向应符合右手螺旋关系。场中任一点到回路中心的距离，都比回路的线性尺度大得多。设磁偶极子被置于 xOy 平面上，如图 3－13 所示。根据(3－44)式，任一点的磁矢位可写成

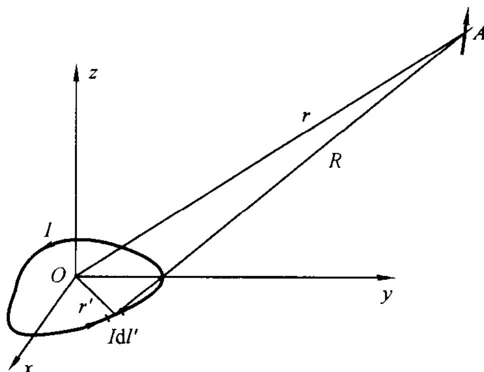


图 3－13　磁偶极子的磁场

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R}$$

应用矢量恒等式

$$\oint_{l} \alpha \, \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S} (\boldsymbol{e}_n \times \nabla \alpha) \, \mathrm{d}S$$

则前一式可改写为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} \left[\boldsymbol{e}_z \times \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\right] \mathrm{d}S' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} \left(\boldsymbol{e}_z \times \frac{\boldsymbol{e}_R}{R^2}\right) \mathrm{d}S'$$

由于磁偶极子的尺度远小于到场点的距离，$R \approx r$，$\boldsymbol{e}_r \approx \boldsymbol{e}_R$，因而上式可以写成

$$\boldsymbol{A} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{S'} \left(\boldsymbol{e}_z \times \frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\right) \mathrm{d}S' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_{S'} (\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r) \mathrm{d}S'$$

由于 $\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z}{r} = \dfrac{r\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + r\cos\theta\boldsymbol{e}_z}{r}$

代入 $\boldsymbol{A}$ 中可得磁矢位的分量

$$A_x = -\frac{\mu_0 I y}{4\pi r^3} \int_S \mathrm{d}S' = -\frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2} \sin\theta \sin\phi$$

$$A_y = \frac{\mu_0 I x}{4\pi r^3} \int_S \mathrm{d}S' = \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2} \sin\theta \cos\phi$$

$$A_z = 0$$

转换到球面坐标，$\boldsymbol{A}$ 的分量是

$$A_r = 0, A_\theta = 0, A_\phi = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^2}\sin\theta$$

通过球面坐标系中的旋度运算，可得磁感应强度的分量

$$B_r = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3}\cos\theta, B_\theta = \frac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}\sin\theta, B_\phi = 0$$

如令 $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S}$ 为磁偶极子的磁矩，可将上面的磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 两式写为

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta)$$

例 3－8　空气中有一长度为 l、截面积为 S，位于 z 轴上的短铜线，如图 3－14 所示。电流密度 $\boldsymbol{J}$ 沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向。设电流是均匀分布的，求离铜线较远处（$r \gg l$）的磁感应强度。

解：应用磁矢位来计算，可令 $\boldsymbol{J} = J\boldsymbol{e}_z$，则

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{J}}{R}\mathrm{d}V' \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\boldsymbol{e}_z\int_{-l/2}^{+l/2}\int_S J\mathrm{d}S'\mathrm{d}l'$$

$$= \frac{\mu_0\boldsymbol{e}_z}{4\pi r}\int_{-l/2}^{+l/2} I\mathrm{d}l$$

式中 $I = JS$，继续进行积分，得

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r}\boldsymbol{e}_z = A_z\boldsymbol{e}_z$$

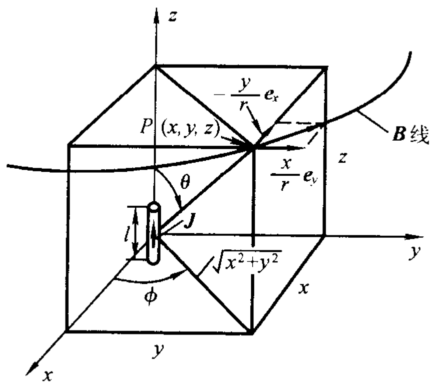


图 3－14　短铜线

对上式进行旋度运算

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2}\left(-\boldsymbol{e}_x\frac{y}{r} + \boldsymbol{e}_y\frac{x}{r}\right) = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r}}\boldsymbol{e}_\phi$$

或

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 Il}{4\pi r^2}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

磁矢位除用于计算 $\boldsymbol{B}$ 外，还可由它直接计算磁通量。因为由（3－24）式知 $\Phi_\mathrm{m} = \int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，利用斯托克斯定理，可得

$$\Phi_\mathrm{m} = \int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (3-45)$$

上式表明，$\boldsymbol{A}$ 沿任一闭合路径 l 的环量，等于穿过以此路径为周界的任一曲面

的磁通量。

3.4.2 磁矢位的边值问题

磁矢位满足泊松方程或拉普拉斯方程。与前两章一样，当场中电流分布已知时可以通过建立微分方程和相关的边界条件，建立起恒定磁场中磁矢位的边值问题。

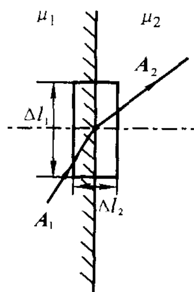


图 3－15

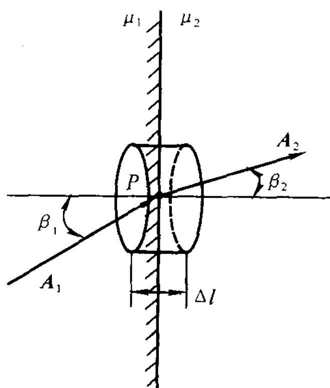


图 3－16

先推导媒质分界面上用 **A** 表示的衔接条件。在媒质分界面上任一点 P 处,取一矩形回路,此回路所围的面积上通过的磁通量 $\Phi_m = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$ ，如图 3－15 所示。令 $\Delta l_2 \to 0$ 则 $\Phi_m = 0$,所以 $\oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$,可得

$$A_{1t} - A_{2t} = 0 \tag{3-46}$$

即磁矢位的切线分量在分界面上连续。又因为 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$（库仑规范条件）,可在分界面 P 点处作一个小圆柱,如图 3－16 所示,利用 $\oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = 0$。当圆柱的高 $\Delta h \to 0$ 时，可得

$$A_{2n} - A_{1n} = 0 \tag{3-47}$$

即磁矢位的法线分量在分界面上也连续。因此，由式(3－46)和(3－47)得

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2 \tag{3-48}$$

上式说明在媒质分界面上磁矢位连续。另外由(3－31)和(3－36)式得

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \boldsymbol{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \boldsymbol{A}_2\right) \times \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{K} \tag{3-49}$$

亦可写为

$$\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \boldsymbol{A}_1)_t - \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \boldsymbol{A}_2)_t = K \tag{3-50}$$

对于平行平面磁场，分界面上的衔接条件是

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A_2 \\ \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n} &= K \end{aligned}\right\} \tag{3-51}$$

以上给出的是磁矢位在媒质分界面上所满足的衔接条件。它和磁矢位所满足的微分方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{3-52}$$

以及场域边界上给定的边界条件一起构成了描述恒定磁场的边值问题。

例 3-9 一半径为 a 的长直圆柱导体通有电流，电流密度 $\boldsymbol{J} = J_z \boldsymbol{e}_z$。求导体内外的磁矢位(导体内外媒质的磁导率均为 μ_0)。

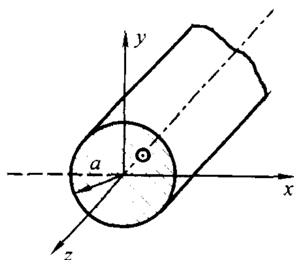


图 3-17 长直圆柱导体

解：由对称性可知，$\boldsymbol{A} = A_z \boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{A}_z$ 仅为ρ的函数，且满足方程$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$

当 $\rho \leqslant a$ 时 $\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial A_1}{\partial \rho}\right) = -\mu_0 J_z$

$\rho \geqslant a$ 时 $\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial A_2}{\partial \rho}\right) = 0$

及边界条件

$$A_1|_{\rho=a} = A_2|_{\rho=a};\frac{1}{\mu_1}\left.\frac{\partial A_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \frac{1}{\mu_2}\left.\frac{\partial A_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a},\text{即}\left.\frac{\partial A_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \left.\frac{\partial A_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}$$

设 $\rho = a$ 处，$A_1|_{\rho=a} = A_2|_{\rho=a} = 0$；当 $\rho \to 0$，A_1 为有限值。

容易得到

$$A_1 = -\frac{\mu_0 J_z}{4}\rho^2 + C_1 \ln\rho + C_2 \text{ 和 } A_2 = C_3 \ln\rho + C_4$$

代入边界条件，当 $\rho \to 0$，A_1 为有限值，故应有 $C_1 = 0$。

当 $\rho = a$ 时，$A_1 = 0$，故 $C_2 = \dfrac{\mu_0 J a^2}{4}$，所以 $\boldsymbol{A}_1 = \dfrac{\mu_0 J_z}{4}(a^2 - \rho^2)\boldsymbol{e}_z$

当 $\rho = a$ 时，$A_1 = A_2 = 0$，故 $C_4 = -C_3 \ln a$ 。

再利用 $\left.\dfrac{\partial A_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = \left.\dfrac{\partial A_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}$，有 $-\dfrac{\mu_0 J_z}{2}a = \dfrac{C_3}{a}$，所以 $C_3 = -\dfrac{\mu_0 J_z}{2}a^2$。

最后，得

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{\rho_0 J_z a^2}{2}\ln\frac{a}{\rho}\boldsymbol{e}_z$$

利用 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，可以解出磁感应强度。

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 J_z\rho}{2}\boldsymbol{e}_\phi & \rho\leqslant a\\[2ex] \dfrac{\mu_0 J_z a^2}{2\rho}\boldsymbol{e}_\phi & \rho\geqslant a\end{cases}$$

在这一例题中，等 $\boldsymbol{A}$ 线是一族以圆柱轴线为中心的同心圆，与磁感应线相同。

在平行平面磁场中，若磁矢位 $\boldsymbol{A}=A_z\boldsymbol{e}_z$，则在 xOy 平面内磁感应线的方程为

$$\frac{B_x}{\mathrm{d}x}=\frac{B_y}{\mathrm{d}y}\qquad B_y\mathrm{d}x-B_x\mathrm{d}y=0$$

因 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{e}_x-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{e}_y$　故　$B_x=\dfrac{\partial A_z}{\partial y}$，　$B_y=\dfrac{-\partial A_z}{\partial x}$，代入上式得

$$\frac{\partial A_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y=0$$

即
$$\mathrm{d}A_z=0$$

这说明平行平面磁场中等 $\boldsymbol{A}$ 线就是 $\boldsymbol{B}$ 线。

例 3-10　一旋转电机，设转子和定子的轴向长度比转子半径大得多，气隙为 a，定、转子表面为光滑圆柱面，定子绕组的电流为沿定子内表面周界作正弦分布的面电流，电流线密度为 $K=K_{\mathrm{m}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{b}x\right)$，$b$ 为极距。求气隙中的磁场分布。

解：忽略边缘效应，气隙中的磁场可视为沿轴向不变的平行平面场，为简单计，将圆形气隙展开成平面，如图 3-18 所示，这对磁场的计算不会造成太大的影响。可用直角坐标系。因定子电流沿轴向，故气隙中磁矢位只有轴向分量 A_z。又因为气隙中无电流分布，故磁矢位 A_z 满足

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=0$$

由于定子铁芯 $\mu\gg\mu_0$，故定子内的磁场强度近似为零。

当 $y=a$ 时　$\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{y=a}=K$

即　$\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{y=a}=\mu_0 K_{\mathrm{m}}\sin\left(\dfrac{2\pi}{b}x\right)$

同理转子 $\mu\gg\mu_0$，且转子表面无电流分布，故 $\dfrac{\partial A_z}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0$。由分离变量法，可得

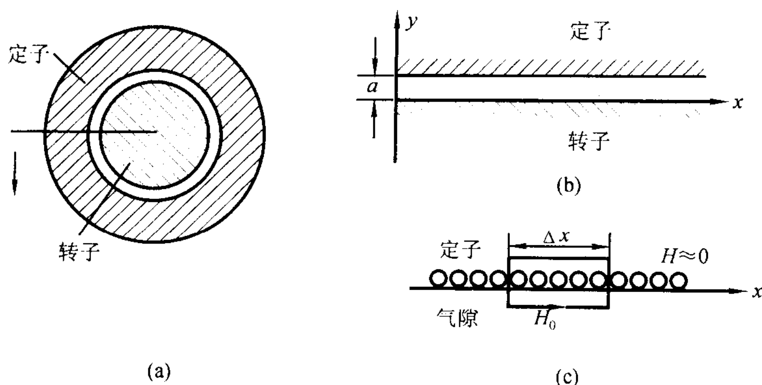


图 3-18 旋转电机的气隙磁场

$$A_z=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(A_n\text{ch}m_nx+B_n\text{sh}m_nx)(C_n\cos m_ny+D_n\sin m_ny)+(A_n'\cos m_nx+B_n'\sin m_nx)(C_n'\text{ch}m_ny+D_n'\text{sh}m_ny)\right]+(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)$$

根据边界条件，A_z 应是 x 的周期函数，故 $A_n=B_n=0$、$A_0=0$ 和 $B_0=0$。于是，有

$$A_z=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n'\cos m_nx+B_n'\sin m_nx)(C_n'\text{ch}m_ny+D_n'\text{sh}m_ny)$$

由条件

$$\left.\frac{\partial A_z}{\partial y}\right|_{y=a}=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n'\cos m_nx+B_n'\sin m_nx)(C_n'm_n\text{sh}m_na+D_n'm_n\text{ch}m_na)=\mu_0K_\text{m}\sin\left(\frac{2\pi}{b}x\right)$$

可知，应取 $A_n'=0;m_n=m_1=\dfrac{2\pi}{b},n\neq1$ 时 $B_n'=C_n'=D_n'=0$

所以 $$B_1'\sin\left(\frac{2\pi}{b}x\right)\left(C_1'\frac{2\pi}{b}\text{sh}\frac{2\pi}{b}a+D_1'\frac{2\pi}{b}\text{ch}\frac{2\pi}{b}a\right)=\mu_0K_\text{m}\sin\left(\frac{2\pi}{b}x\right)$$

$$B_1'\frac{2\pi}{b}\left(C_1'\text{sh}\frac{2\pi}{b}a+D_1'\text{ch}\frac{2\pi}{b}a\right)=\mu_0K_\text{m}$$

因此，解简化成 $A_z=B_1'\sin\dfrac{2\pi}{b}x\left(C_1'\text{ch}\dfrac{2\pi}{b}y+D_1'\text{sh}\dfrac{2\pi}{b}y\right)$

再由 $$\left.\frac{\partial A_z}{\partial y}\right|_{y=0}=0$$

则 $$D_1'=0$$

因此 $$B_1'C_1'=\mu_0K_\text{m}\Big/\left(\frac{2\pi}{b}\text{sh}\frac{2\pi}{b}a\right)$$

最后得气隙中磁矢位为

$$A_z = \frac{\mu_0 K_m b}{2\pi \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{b}a\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{b}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

气隙中的磁感应强度的分量为

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0 K_m}{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{b}a\right)} \sin\left(\frac{2\pi}{b}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 K_m}{\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{b}a\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{b}y\right)$$

习　题 (3－4)

3－4－1　在某一场域内，如果磁矢位 $\boldsymbol{A} = 5x^3\boldsymbol{e}_x$，试求电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的分布。

3－4－2　在恒定磁场中，已知磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标中的表达式为

$$A_z = \begin{cases} -\dfrac{\mu I}{4\pi\rho_0{}^2}\rho^2 & \rho \leqslant \rho_0 \\ \dfrac{\mu I}{2\pi}\left(\ln\dfrac{\rho_0}{\rho} - \dfrac{1}{2}\right) & \rho > \rho_0 \end{cases}$$

试求 $\boldsymbol{H}$ 的分布。

3－4－3　已知电流分布为

$$\boldsymbol{J} = J_0\rho\boldsymbol{e}_z \qquad \rho \leqslant a$$

J_0 为常数,求磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$（注 $\boldsymbol{A}$ 的参考点选为 $\rho = \rho_0 > a$ 处）。

§3－5　磁　　位

在上一节中，对于恒定磁场虽已引入了磁矢位，但在一般情况下，它不像静电场中的电位函数那样会给运算带来更多的方便。对于恒定磁场，是否在一定条件下，也能得到一个类似的标量函数来描述磁场?

3.5.1　磁位

恒定磁场的基本方程之一 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ 说明恒定磁场不同于静电场，它不是一个无旋场。因此，一般地说，不能通过一个标量位函数来表征磁场的特性。

不过，在没有电流分布的区域内，传导电流密度 $\boldsymbol{J} = 0$，则

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$$

因此在传导电流为零的区域内，可假设

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m \tag{3-53}$$

式中 φ_m 表示磁位，亦称标量磁位。在 *SI* 中，φ_m 的单位是*A*（安）。引入磁位的概念完全是为了使某些情况下磁场的计算简化，它并无物理意义。

磁位相等的各点形成的曲面称为等磁位面，其方程是 φ_{m} = 常数。等磁位面与磁场强度 **H** 线相互垂直，因此磁导率很大的材料表面是近似的“等磁位面”。

磁场中，两点间的磁压定义为

$$U_{\mathrm{m}AB} = \int_A^B \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{\varphi_{\mathrm{m}A}}^{\varphi_{\mathrm{m}B}} \mathrm{d}\varphi_{\mathrm{m}} = \varphi_{\mathrm{m}A} - \varphi_{\mathrm{m}B} \tag{3-54}$$

在静电场中，两点间的电压，只与该两点的位置有关，而与积分路径无关，也就是说，只要选定参考点，场中各点都有确定的电位值。但在磁场中，情况就不同了。如图 3-19，取一围绕电流的闭合路径 *AlBmA* 来求 **H** 的线积分，则根据安培环路定律，应有 $\oint_{AlBmA} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$ 可以写成

$$\int_{AlB} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + I$$

如取积分回路围绕电流 k（k 是任意整数）次，则

$$\oint_{AlBmA} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = kI$$

或

$$\int_{AlB} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{AmB} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + kI$$

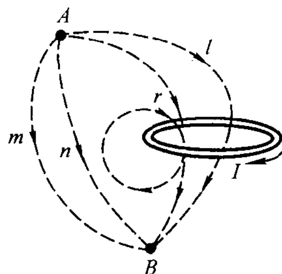


图 3-19 磁位 φ_m 与积分路径的关系

这说明在磁场中，*A*、*B* 两点间的磁压，要随积分路径而变。这样，对于磁场中任意一点来说，即使参考点已选定，其磁位仍是一个多值函数。磁位的多值性，对于计算磁感应强度和磁场强度并没有影响。另外还可以作一些规定来消除多值性。例如，在电流回路引起的磁场中，可以规定积分路线不准穿过回路所限定的面，即所谓磁屏障面。使磁场中各点的磁位成为单值函数，两点间的磁压，也就与积分路径无关了。

3.5.2 磁位的边值问题

在均匀媒质中，磁位也满足拉普拉斯方程。在基本方程之一

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

中，代入 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$，并考虑到 $\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi_{\mathrm{m}}$，则有

$$\nabla \cdot (-\mu \nabla \varphi_{\mathrm{m}}) = -\nabla\varphi_{\mathrm{m}} \cdot \nabla\mu - \mu \nabla \cdot \nabla\varphi_{\mathrm{m}} = 0$$

由于媒质是均匀的，$\nabla\mu = 0$，因此上式成为

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{m}} = 0 \tag{3-55}$$

这就是磁位的拉普拉斯方程。

两种不同媒质分界面上的衔接条件，也可以用磁位表示，它们是

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \tag{3-56}$$

和

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} \tag{3-57}$$

以上两式分别与(3-32)和(3-33)式相对应。(3-55)、(3-56)和(3-57)式与场域边界条件一起就构成了用磁位描述恒定磁场的边值问题。但是在应用时，还须考虑在该区域内，磁位的存在条件(即应注意在有电流分布的区域里，不能引用磁位)。

例 3-11　设在均匀磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 中，放置一个磁导率为 μ 的无限长直圆柱体，其截面半径为 a，圆柱外磁导率为 μ_0，求圆柱内、外的磁场。

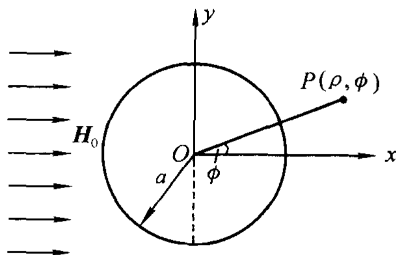


图 3-20　均匀外磁场中的无限长圆柱体

解：选择圆柱坐标系，使圆柱的轴线与 z 轴重合，用 φ_{m1}、φ_{m2}分别表示圆柱内、外的磁位，它们所满足的方程为

$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0 \quad \rho \leqslant a \quad , \quad \nabla^2 \varphi_{m2} = 0 \quad \rho \geqslant a$

边界条件是：$\rho = 0$ ，　令 $\varphi_{m1} = 0$ 为参考磁位；

$$\rho = a \ , \quad \varphi_{m1} = \varphi_{m2}, \quad \mu \frac{\partial \ \varphi_{m1}}{\partial \ \rho} = \mu_0 \frac{\partial \ \varphi_{m2}}{\partial \ \rho}$$

$$\rho \to \infty \ , \quad \varphi_{m2} = -H_0 \rho \cos \phi$$

方程的通解为

$$\varphi(\rho, \phi) = (A_0 + B_0 \ln \rho)(C_0 + D_0 \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n})(C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi)$$

由 $\rho \to \infty$时，　$\varphi_{m2} = -H_0 \rho \cos \phi$，可得 $A_0 = B_0 = 0$

且 n 只取值 1，则 $\varphi_{m2} = A_1 C_1 \rho \cos \phi + \dfrac{B_1 C_1}{\rho} \cos \phi = -H_0 \rho \cos \phi + \dfrac{F_1}{\rho} \cos \phi$

由 $\rho = a$ ，$\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$，则

$$\varphi_{m1} = -F_2 \rho \cos \phi + \frac{F_3}{\rho} \cos \phi$$

其中 F_1, F_2, F_3 为待定系数 。

由 $\rho = 0$ ，$\varphi_{m1} = 0$ ，则 $F_3 = 0$。所以

$$\varphi_{m1} = -F_2 \rho \cos \phi$$

再由在 $\rho = a$， $\varphi_{m1} = \varphi_{m2}$，$\mu_1 \dfrac{\partial \varphi_{m1}}{\partial \rho} = \mu_0 \dfrac{\partial \varphi_{m2}}{\partial \rho}$，则

$$F_1 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} a^2 H_0$$

$$F_2 = \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} H_0$$

故
$$\varphi_{m1}(\rho, \phi) = -\frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} H_0 \rho \cos\phi \qquad \rho \leqslant a$$

$$\varphi_{m2}(\rho, \phi) = -H_0 \rho \cos\phi + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} a^2 H_0 \frac{1}{\rho} \cos\phi \qquad \rho \geqslant a$$

利用 $\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_m$，可得

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} H_0 (\boldsymbol{e}_\rho \cos\phi - \boldsymbol{e}_\phi \sin\phi)$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{e}_\rho \left[1 - \frac{(\mu - \mu_0) a^2}{(\mu + \mu_0) \rho^2}\right] H_0 \cos\phi + \boldsymbol{e}_\phi \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \cdot \frac{a^2}{\rho^2} - 1\right) H_0 \sin\phi$$

从结果可看出，圆柱内的磁场均匀且小于外磁场；圆柱外的磁场在 ρ 接近 a 时，媒质影响较大；当 $\rho \to \infty$ 时，$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0$

习 题 (3-5)

3-5-1 截面为圆环形的中空长直导线沿轴向流过的电流为 I，导线圆环的内外半径分别为 R_1, R_2。求导体以外空间各处的磁位和磁场强度。

3-5-2 真空中在 $x = -2$ m，$y = 0$ 处，有一沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向 6 mA 的线电流，另外在 $x = 2$ m，$y = 0$ 处有一沿 $(-\boldsymbol{e}_z)$ 方向 6 mA 的线电流，设原点的磁位 $\varphi_m = 0$，试求沿 y 轴的磁位 φ_m。

§3-6 镜 像 法

求解恒定磁场问题，通常可归结为求解满足给定边值条件的泊松方程或拉普拉斯方程的问题。根据磁场问题解答的唯一性，可以应用与静电场相似的镜像法来求解恒定磁场的问题。

例如，有两种媒质，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2，在媒质 1 内置有电流为 I 的无限长直导线，且平行于分界面，如图 3-21 (a)所示。求解两种媒质内的磁场。

对照静电场的镜像法，要求解媒质 1 中的场，可考虑整个场都充满导磁媒质 μ_1，而其中的场是由线电流 I 和像电流 I' 共同产生的，如图 3－21 (b)所示。同样，对于媒质 2 中的场，则可考虑整个场都充满导磁媒质 μ_2，其中的场由像电流 I'' 所产生，如图 3－21 (c)所示。这样不论对媒质 1 区域还是媒质 2 区域，位函数所满足的方程都没有改变。如果在两种媒质分界面上满足衔接条件，则原来场中的一切条件都得到满足。下面利用衔接条件来确定 I'、I''。

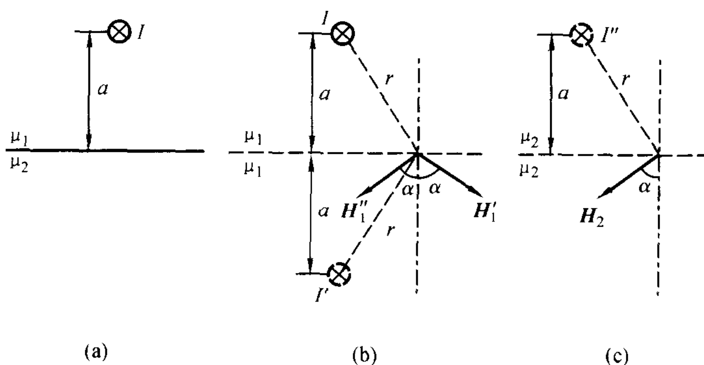


图 3－21　线电流对无限大媒质分界面的镜像

根据 $H_{2t}=H_{1t}$，可以求得

$$\frac{I}{2\pi r}\sin\alpha-\frac{I'}{2\pi r}\sin\alpha=\frac{I''}{2\pi r}\sin\alpha$$

或

$$I-I'=I'' \tag{3-58}$$

再由 $B_{1n}=B_{2n}$，可得

$$\mu_1\frac{I_1}{2\pi r}\cos\alpha+\mu_1\frac{I'}{2\pi r}\cos\alpha=\mu_2\frac{I''}{2\pi r}\cos\alpha$$

或

$$\mu_1(I+I')=\mu_2 I'' \tag{3-59}$$

联立解(3－58)和(3－59)两式，即得

$$I'=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I \tag{3-60}$$

$$I''=\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}I \tag{3-61}$$

这里要注意，在(3－60)式和(3－61)式中，I' 和 I'' 的参考方向都规定和 I 的参考方向一致。可以看出，I'' 总是正的，即它的方向总是和 I 的方向一致；但 I' 的方向要看($\mu_2-\mu_1$)的正负而定。下面分别讨论两种特殊情况。

若第一种媒质是空气($\mu_1=\mu_0$)，第二种媒质是铁磁物质($\mu_2\to\infty$)，载流导线置于空气中，则根据(3－60)式和(3－61)式，得

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_2 + \mu_0} I \approx I$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_0} I \approx 0$$

这时，铁磁物质内的磁场强度 H_2 将处处为零，但不要认为磁感应强度 B_2 也处处为零。实际上

$$B_2 = \mu_2 H_2 = \mu_2 \frac{I''}{2\pi r} = \mu_2 \left(\frac{2\mu_0}{\mu_2 + \mu_0} I \right) \frac{1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{\pi r}$$

另一种情况是两种媒质的分布未变，但载流导线置于铁磁物质中，也就是 $\mu_1 \to \infty$，而 $\mu_2 = \mu_0$，这时

$$I' = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_0} I \approx -I$$

$$I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_0} I \approx 2I$$

可见空气中的磁感应强度与整个空间都充满空气(即铁磁物质不存在)时相比较，增大了一倍(设两种情况下导线中的电流值相等)。

图 3-22 和图 3-23 分别表示 $\mu_1 = \mu_0, \mu_2 = 9\mu_0$ 和 $\mu_1 = 9\mu_0, \mu_2 = \mu_0$ 时场中的磁感应线。

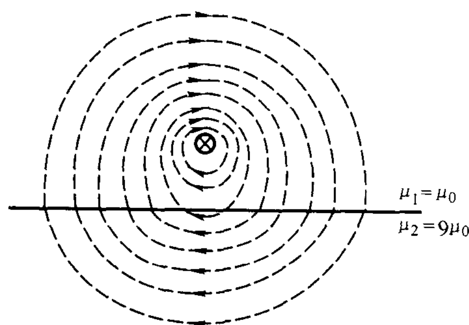


图 3-22

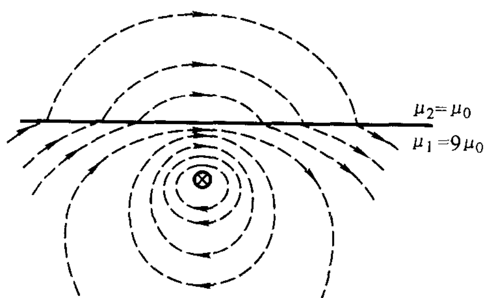
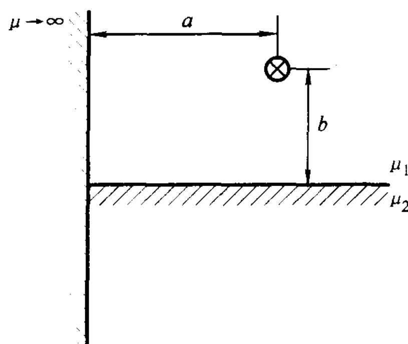


图 3-23

习 题 (3-6)

3-6-1 在磁导率 $\mu = 7\mu_0$ 的半无限大导磁媒质中，距媒质分界面 2 cm 处有一载流为 10 A 的长直细导线，试求媒质分界面另一侧(空气)中距分界面 1 cm 处 P 点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

3-6-2 如图所示，求电流 I 所在区域为有效区时，镜像电流的大小、位置。



题 3－6－2 图

§3－7　电　　感

电感器的电感是电路理论中的基本参数之一，它有自感和互感之分。这一节将通过磁链来定义自感和互感，并介绍它们的计算方法。

3.7.1　自感

在各向同性的线性媒质中，如磁场由某一电流回路产生，则穿过此回路所限定面积的磁通，与回路中的电流有正比关系，也就是与回路相交链的磁链 Ψ_L 和电流成正比，即

$$\Psi_L = LI \tag{3-62}$$

或

$$L = \frac{\Psi_L}{I} \tag{3-63}$$

式中的 Ψ_L 为自感磁链，L 为自感系数，简称自感。在 SI 中，自感的单位是 H（亨）。自感仅与回路的尺寸、几何形状及媒质的分布有关，而与通过回路的电流及磁链的具体量值无关。下面讨论自感 L 的计算问题。

在计算自感时，常用到内磁链和内自感的概念。在导线内部，仅与部分电流相交链的磁通称为内磁通，相应的磁链为内磁链，用 Ψ_i 表示，则内自感

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \tag{3-64}$$

同样，完全在导线外部闭合的磁通称为外磁通，相应的磁链为外磁链，用 Ψ_o 表示。则外自感

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} \tag{3-65}$$

因而自感为内自感与外自感之和，即

$$L = L_i + L_o \tag{3-66}$$

例 3-12　计算图 3-24 所示长为 l 的同轴电缆的自感。

解：设构成电缆的所有材料的磁导率均为 μ_0，若 $R_3 \approx R_2$，即外壳的厚度可以忽略不计。假设通过的电流为 I，如图 3-24 所示。

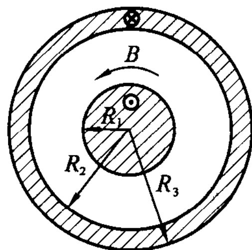


图 3-24　同轴电缆的电感

内导体中电流密度 $\boldsymbol{J} = \frac{I}{\pi {R_1}^2}\boldsymbol{e}_z$。先求内磁链，由安培环路定律，可求出在内导体中，即 $\rho < R_1$ 处

$$B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi {R_1}^2}$$

穿过由轴向长度 l 宽为 $d\rho$ 构成的矩形元面积上的元磁通为

$$d\Phi_i = B dS = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi {R_1}^2} l \, d\rho$$

求磁链时，必须注意，与 $d\Phi_i$ 相交链的电流不是 I，仅是它的一部分 I'，且

$$I' = \frac{\pi \rho^2}{\pi {R_1}^2} I = \frac{\rho^2}{{R_1}^2} I$$

因此，与 $d\Phi_i$ 相应的元磁链为

$$d\Psi_i = \frac{I'}{I} d\Phi_i = \frac{\mu_0 I \rho^3}{2\pi {R_1}^4} l \, d\rho$$

内导体中的自感磁链总量为

$$\Psi_i = \int d\Psi_i = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I \rho^3}{2\pi R_1^4} l \, d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

由此可得内自感

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$$

值得注意，内自感的值，仅与圆导线的长度有关，而与半径无关。

当 $R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$ 时，由安培环路定律，可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

此时，

$$d\Psi_o = \frac{\mu_0 I l}{2\pi \rho} d\rho$$

$$\Psi_o = \int d\Psi_o = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I l}{2\pi \rho} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

故外自感

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

当 $\rho > R_2$ 时，$B=0$，无磁场。故总电感

$$L = L_i + L_o = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

若外壳厚度不能忽略，即 $R_3 \neq R_2$ 时，只要再计算出外壳层的内自感，与前面所计算出的电感相加即可。

当 $R_2 \leqslant \rho \leqslant R_3$ 时，$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\cdot\frac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^2}$，$\mathrm{d}\Phi_i' = Bl\,\mathrm{d}\rho$，这时与电流交链的磁链

$$\mathrm{d}\Psi_i' = \frac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^2}\cdot\frac{\mu_0 Il}{2\pi\rho}\,\frac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^2}\mathrm{d}\rho$$

则

$$\Psi_i' = \int_{R_2}^{R_3}\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\frac{R_3^2-\rho^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2} + \frac{1}{4}\,\frac{R_3^2+R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right]$$

则外壳导体的内自感为

$$L_i' = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2} + \frac{1}{4}\,\frac{R_3^2+R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right]$$

此时电缆的总电感

$$\begin{aligned} L &= L_i + L_o + L_i' \\ &= \frac{\mu_0 l}{8\pi} + \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} + \\ &\quad \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\left(\frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2}\right)^2\ln\frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{R_3^2-R_2^2} + \frac{1}{4}\,\frac{R_3^2+R_2^2}{R_3^2-R_2^2}\right] \end{aligned}$$

例 3-13　求图 3-25 所示二线传输线的自感。

解：两导线的几何尺寸如图 3-25 所示，由于电流均匀分布，在计算外磁链时，可认为电流集中在几何轴线上，在距左轴线 x 处的磁场强度

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(D-x)}$$

其方向垂直进入纸平面，穿过元面积 $l\mathrm{d}x$ 的磁通

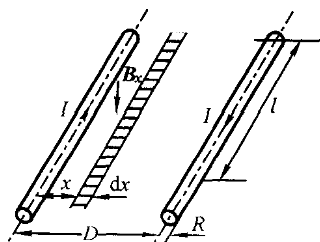


图 3-25　二线传输线的自感

$d\Phi_m = Bl\,dx$，故外磁链

$$\Psi_o = \int d\Phi_m = \int_R^{D-R} Bl\,dx = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

因而外自感

$$L_o = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

一般情况下，$D \gg R$，故

$$L_o \approx \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D}{R}$$

二根导线的内自感为

$$L_i = 2\times\frac{\mu_0 l}{8\pi} = \frac{\mu_0 l}{4\pi}$$

由此得二线传输线的自感为

$$L = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D}{R} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln\frac{D}{R}\right)$$

3.7.2 互感

在线性媒质中，由回路1的电流 I_1 所产生而与回路2相交链的磁链 Ψ_{21} 和 I_1 成正比，即

$$\Psi_{21} = M_{21}I_1 \tag{3-67}$$

或

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \tag{3-68}$$

式中 M_{21} 即回路1对回路2的互感。同理，回路2对回路1的互感可表示为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \tag{3-69}$$

以上三个式子中的 Ψ_{21} 和 Ψ_{12} 都表示互感磁链，它们下标的第一个数字表示与磁通交链的回路，第二个数字表示引起磁通的电流回路。可以证明

$$M_{12} = M_{21} \tag{3-70}$$

互感不仅和线圈及导线的形状、尺寸和周围媒质及导线材料的磁导率有关，还和两回路的相互位置有关。在SI中，互感的单位是H(亨)。

例3-14　求图3-26所示传输线的互感。图中 AB 表示一对传输线，CD 表示另一对传输线，设 AB 上电流方向如图中所示。

解：电流均匀流动，故可以把导线几何轴线作为电流对外作用的中心线，

因此导线 A 中的电流所产生的与 CD 传输线相交链的互感磁链应为

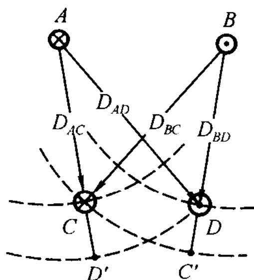


图 3-26 二对传输线的互感

$$\Psi_{MA} = \Phi_{MA} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

同理导线 B 中的电流所产生的与 CD 传输线相交链的互感磁链为

$$\Psi_{MB} = \Phi_{MB} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

由于这两部分磁通方向相同，总的互感磁链为

$$\Psi_M = \Psi_{MA} + \Psi_{MB} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$$

从而得互感为

$$M = \frac{\Psi_M}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$$

3.7.3 聂以曼公式

在计算自感和互感时还可应用磁矢位的线积分来计算磁通，从而求磁链。这里介绍应用磁矢位 **A** 计算互感和自感的一般公式，即聂以曼公式。

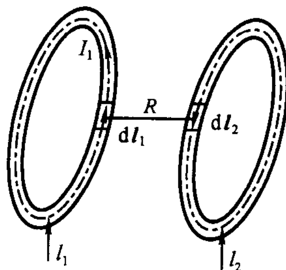


图 3-27 两个细导线电流回路

如图 3-27 所示为两个由细导线构成的回路，设导线及周围媒质的磁导率都为 μ_0。令回路 1 中通有电流 I_1，因导线是线形的，故电流的对外作用中心可看作集中在导线的几何轴线上，回路 2 也可看成由图中点划线组成横截面积为零的回路。因此，回路 1 中电流 I_1 在 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$ 处产生的磁矢位为

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R}$$

由回路 1 中电流 I_1 产生而和回路 2 相交链的互感磁链为

$$\Psi_{21} = \Phi_{m21} = \oint_{l_2}\boldsymbol{A}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R} \tag{3-71}$$

可见，两细导线回路间的互感为

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R} \tag{3-72}$$

若回路 1、2 分别由 N_1 和 N_2 匝的细导线紧密绕制而成，则互感为

$$M_{21} = M_{12} = \frac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R} \tag{3-73}$$

式中 l_1、l_2 分别表示一匝的长度。(3-73)式就是通过磁矢位来计算电感的一般公式，称为聂以曼公式。

应用聂以曼公式也可计算线圈的自感。设图 3-27 中的两个细导线回路的形状和尺寸相同，将它们重叠起来，便成为如图 3-28 所示的导线回路了。仍然研究匝数等于 1 的情况。应该指出，现在计算自感不能直接套用(3-73)式的右边部分，因为这里的 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$ 已重合在一起，积分式中的 $\boldsymbol{R}$ 有可能等于零，因而将使积分值趋于无限大。这个因难可通过下面的办法来克服：导线回路的自感一般仍可分为外自感及内自感两部分。和外自感相应的那部分外磁通和电流相交链的次数是整数，因而在计算外磁通时，应以导线内侧边线 $\boldsymbol{l}_2$ 作为回路的边界，但对于其中流过的电流的对外作用中心线仍然应看作集中在几何轴线上，如图中点划线 $\boldsymbol{l}_1$ 所示。这样一来计算细导线回路的外自感就相当于计算由 $\boldsymbol{l}_1$、$\boldsymbol{l}_2$ 所构成的两回路间的互感了，因而可以直接应用(3-72)式，从而

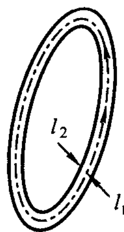


图 3-28

$$L_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R} \tag{3-74}$$

对于匝数等于 N 的紧密绕制的导线回路来说，其外自感应等于

$$L_o = \frac{N^2\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R} \tag{3-75}$$

因为构成细导线回路的导线横截面的半径远小于该回路的曲率半径，所以导线内的电流可近似地认为作均匀分布，因而匝数等于 1 的导线回路的内自感 L_i 可认为等于 $\frac{\mu_0 l_1}{8\pi}$。通常导线回路的内自感远小于外自感，所以它的自感为

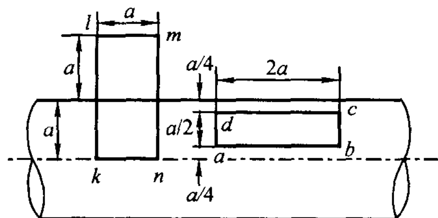
$$L = L_i + L_o \approx L_o$$

习　题　(3-7)

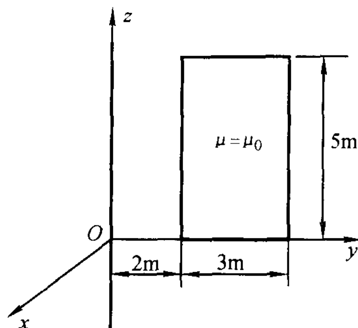
3-7-1　真空中一长直导线，通有电流 I，参阅附图，求与回路 $abcd$ 和 $klmn$ 交链的磁通。

3-7-2　有一横截面为正方形的铁磁镯环，均匀绕有 500 匝导线，镯环内外半径分别为 $R_1=6$ cm 和 $R_2=7$ cm，高 $h=1$ cm，$\mu=800\mu_0$，求线圈的自感系数。

3-7-3　如图所示，求真空中(1)沿 z 轴放置的无限长线电流和匝数为 1 000 的矩形回路之间的互感；(2)如矩形回路及其它长度所标尺寸的单位不是米而是厘米，重新求互感。



题 3-7-1 图



题 3-7-3 图

§3-8　磁场能量与力

静电场中储存有能量，恒定磁场中也储存有能量。这些能量是在电场或磁场建立过程中，由外源作功转换而来的。这一节将介绍的是磁场能量的计算及其分布方式，并在此基础上介绍计算磁场力的虚位移法和法拉弟观点。

3.8.1　恒定磁场中的能量

假设磁场和电流的建立过程都缓慢进行，周围均为线性媒质，且没有电磁能量辐射及其它损耗。这样，外源所做的功都转变为磁场中储存的能量。为简单起见，下面先讨论单个电流回路的情况。

设有一个回路 l，通入电流时，由于电流的变化，穿过回路的磁通发生变化，会在回路中产生感应电动势。感应电动势在回路中产生感应电流，感应电流产生的磁通要阻碍原磁通的变化，因此电流从零变化到 I 的过程中，外源要克服感应电动势作功。在 $\mathrm{d}t$ 时间间隔中，外源所作的功 $\mathrm{d}A = ui\mathrm{d}t$ 。因为电压 $u = \dfrac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$,所以 $\mathrm{d}A = Li\ \mathrm{d}i$ ，整个过程中外源所作的功全部转化为磁场中储存的能量，故

$$W_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}A = \int_0^I Li\ \mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2 \tag{3-76}$$

上式表明磁场能量只与回路电流最终状态有关，与电流建立的过程无关。

若线性媒质中有两个回路 l_1、l_2,它们的电流分别为 i_1、i_2。这时,可以选择一个便于计算的电流建立过程。让两回路电流都按同一比例增长,即在磁场建立过程的某一瞬间,两回路电流分别为 $i_1 = mI_1$、$i_2 = mI_2$,如图 3-29 所示。其中 m 是一个变量($0 \leqslant m \leqslant 1$)。也就是在磁场建立之初,$m = 0$;磁场建成时,$m =$

1。由于回路中的磁链和电流有线性关系，在这一瞬间，穿过两回路的磁链分别为 $m\Psi_1$ 和 $m\Psi_2$。这样外源所做的功应为两回路中对电流所做功之和，即

$$dA = dA_1 + dA_2$$

其中 $dA_1 = u_1 i_1 dt = \frac{d(m\Psi_1)}{dt} mI_1 dt = mI_1 d(m\Psi_1)$，$dA_2 = mI_2 d(m\Psi_2)$。整个过程中外源对回路电流所做的功都转变成磁场中储存的能量，故

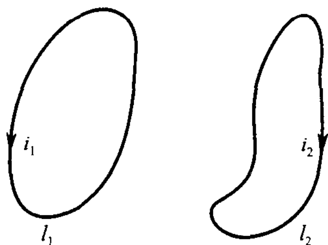


图 3-29 两个回路电流的建立

$$W_m = \int dA = \int mI_1 d(m\Psi_1) + \int mI_2 d(m\Psi_2) = (I_1\Psi_1 + I_2\Psi_2)\int_0^1 m\,dm$$

$$= \frac{1}{2}(I_1\Psi_1 + I_2\Psi_2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} I_k\Psi_k \tag{3-77}$$

(3-77)式就是两个电流回路系统储存的磁场能量。它等于各回路电流与磁链乘积的代数和的一半，式中的 I_k、Ψ_k 都是建立过程的最终值。达到稳定后，磁链与电流有下列关系，即

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 \\ \Psi_2 &= L_2 I_2 + M_{21} I_1 \end{aligned} \tag{3-78}$$

因为 $M_{12} = M_{21} = M$。将(3-78)式代入(3-77)式得

$$W_m = \frac{1}{2}(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2MI_1 I_2) \tag{3-79}$$

顺便指出，(3-79)式中的 $\frac{1}{2}L_1 I_1^2$ 和 $\frac{1}{2}L_2 I_2^2$ 分别仅与1号和2号回路各自的电流和自感系数有关，故称为自有能。MI_1I_2 是两个电流回路间的相互作用能，它与两回路电流及互感系数有关，称为互有能。自有能恒为正，互有能则可正可负，随电流流向而定。如同在电路理论中规定的方法，当两回路电流同时自回路(线圈)同名端流入(出)时，互有能为正，否则为负。

对于 n 个电流回路组成的系统，不难推知磁场能量的表达式为

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\Psi_k \tag{3-80}$$

其中

$$\Psi_k = M_{k1}I_1 + M_{k2}I_2 + \cdots + L_k I_k + \cdots + M_{kn}I_n \quad (k = 1,2,\cdots,n) \tag{3-81}$$

将(3-81)式代入(3-80)式，得

$$\begin{aligned} W_m = &\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}L_n I_n^2 + M_{12}I_1 I_2 \\ &+ M_{13}I_1 I_3 + \cdots + M_{(n-1)n}I_{n-1}I_n \end{aligned} \tag{3-82}$$

上式中已应用了 $M_{kj}=M_{jk}$ 这一关系。

3.8.2 磁场能量的分布及其密度

磁场能量虽然来源于回路电流建立过程中外源所做的功，但它并不是只存在于电流回路内，而是分布于磁场所存在的整个空间中。为了更清楚地表明这一点，下面寻求磁场能量 W_{m} 与场量 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 的关系。在 n 个电流回路(设它们都是单匝的)的磁场中,第 k 号回路的磁链可表示为

$$\Psi_k=\int_{S_k}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{l_k}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

代入(3-80)式，可得

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{l_k}I_k\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{3-83}$$

对更普遍的情况，电流不是限制在线形导体内，而是分布在导电媒质内，即用 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$ 代替 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，用体积分代替线积分，并将体积积分范围扩大到包含所有载流回路，这样(3-83)式即可写成

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{3-84}$$

利用 $\boldsymbol{J}=\nabla\times\boldsymbol{H}$ 的关系，上式还可写为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}V \tag{3-85}$$

利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}$，(3-85)式成为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$$

再应用散度定理以及 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的关系，得

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\oint_S\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$$

式中等号右端第一项中的闭合面 S 是包围整个体积 V 的。假设所有电流回路都为有限分布，而把 S 面取得离电流回路很远。这样 H 随 $\frac{1}{r^2}$ 变化，A 随 $\frac{1}{r}$ 变化，面积 S 随 r^2 变化，故当 $r\to\infty$ 时，第一项的闭合面积分应等于零。因而

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \tag{3-86}$$

这一结果与静电能量的表达式完全类似。对比静电能量体密度同样的讨论，由(3-86)式可以推出磁场能量的体密度为

$$w'_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3-87}$$

对于各向同性的线性导磁媒质，还可写成

$$w'_m = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \tag{3-88}$$

例 3-15 求长度为 l，内外导体半径分别为 R_1 和 R_2（外导体很薄）的同轴电缆，通有电流 I 时，电缆所具有的磁场能量（两导体间媒质的磁导率为 μ_0）。

解： 当 $\rho < R_1$ 时，$H_1 = \dfrac{I'}{2\pi\rho} = \dfrac{\rho I}{2\pi {R_1}^2}$，$B_1 = \dfrac{\mu_0 \rho I}{2\pi {R_1}^2}$

$R_1 < \rho < R_2$ 时，$H_2 = \dfrac{I}{2\pi\rho}$，$B_2 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$

$\rho > R_2$ 时，$H_2 = 0$，$B_2 = 0$

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\left(\int_0^{R_1}\frac{\rho I}{2\pi {R_1}^2}\cdot\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi {R_1}^2}\cdot l2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho\right.\\ &\quad \left.+\int_{R_1}^{R_2}\frac{I}{2\pi\rho}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}l2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\\ &=\frac{\mu_0}{2}\frac{I^2 l}{4\pi^2}\left(\int_0^{R_1}\frac{\rho^3}{{R_1}^4}2\pi\mathrm{d}\rho+\int_{R_1}^{R_2}2\pi\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right)\\ &=\frac{I^2\mu_0 l}{4\pi}\left(\frac{1}{4}+\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\end{aligned}$$

利用单一载流回路情况下，磁场能量 $W_m = \dfrac{1}{2}LI^2$ 的关系，即(3-76)式，可通过磁场能量求得自感，即

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \tag{3-89}$$

由此得上面例题中同轴电缆的自感 $L = \dfrac{2W_m}{I^2} = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\dfrac{1}{4}+\ln\dfrac{R_2}{R_1}\right)$。显然，利用磁场能量计算电感也是很方便的。许多工程实际问题中常用数值计算方法求出场量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$，据以计算磁场能量，然后利用(3-89)式来确定单个载流系统的电感值。

3.8.3 磁场力

载流导体或运动电荷在磁场中所受的力叫磁场力或电磁力，工程中许多仪表就是利用电磁力进行设计的。

磁场对运动电荷的作用力可用(3-7)式进行计算。磁场作用于元电流段 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{f} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$，磁场作用于载流回路的力为 $\boldsymbol{F} = \oint_l I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$。原则

上，磁场力都可归结为磁场作用于元电流段的力，但这样需用矢量积分式来计算，通常是很繁复的。如能像静电场中讨论过的那样，应用虚位移法求磁场力，则在很多问题中都可以简化计算。

设有 n 个载流回路所构成的系统，它们分别与电压为 U_1，U_2，…，U_n 的外源相联，且分别通有电流 I_1，I_2，…，I_n。假设除了第 P 号回路外，其余都固定不动，且回路 P 也只能这样运动，即仅有一个广义坐标 g 发生变化，这时在该系统中发生的功能过程是

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_{\mathrm{m}} + f\mathrm{d}g \tag{3-90}$$

即所有电源提供的能量等于磁场能量的增量加上磁场力所作的功。(3-90)式中的 $\mathrm{d}W$ 可表示成

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\Psi_k \tag{3-91}$$

下面分别讨论两种情况：

(1) 假定各回路中的电流保持不变，即 I_k = 常量，这时根据(3-80)式，有

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}\Big|_{I_k=\text{常量}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k \mathrm{d}\Psi_k$$

可见 $\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}\Big|_{I_k=\text{常量}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}W$，即外源提供的能量，有一半作为磁场能量的增量，另一半用于作机械功，即

$$f\mathrm{d}g = \mathrm{d}W_{\mathrm{m}}\Big|_{I_k=\text{常量}}$$

由此可得广义力

$$f = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}g}\Bigg|_{I_k=\text{常量}} = +\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\Bigg|_{I_k=\text{常量}} \tag{3-92}$$

(2) 假定与各回路相交链的磁链保持不变，即 Ψ_k = 常量，$\mathrm{d}\Psi_k = 0$。这时 $\mathrm{d}W$ 也为零，即外源提供的能量为零。根据(3-90)式，有

$$f\mathrm{d}g = -\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}\Big|_{\Psi_k=\text{常量}}$$

从而得广义力

$$f = -\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}g}\Bigg|_{\Psi_k=\text{常量}} = -\frac{\partial W}{\partial g}\Bigg|_{\Psi_k=\text{常量}} \tag{3-93}$$

此时，磁场力作功只有靠系统内磁场能量的减少来完成。

(3-92) 与(3-93)两式所得的都是在当时的电流和磁链情况下的力，因此，两者是相等的，即

$$f = \frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\Bigg|_{I_k=\text{常量}} = -\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\Bigg|_{\Psi_k=\text{常量}}$$

在实际问题中，有时只要求计算某一系统中的相互作用力，这时，只要写出它们相互作用能的表达式，然后求偏导数即可。

例 3-16 求图 3-30 所示载流平面线圈在均匀外磁场中受到的力矩。设线圈中的电流为 I_1，线圈的面积为 S，其法线方向与外磁场 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 α。

解：这一系统的相互作用能为

$$W_{mM} = MI_1I_2 = I_1\Psi_{12} = I_1BS\cos\alpha$$

选 α 为广义坐标，对应的广义力是力矩，为

$$T = \left.\frac{\partial W_{mM}}{\partial \alpha}\right|_{I_1=\text{常量}} = -I_1BS\sin\alpha = -Bm\sin\alpha$$

式中 $m = I_1S$ 为载流回路的磁矩；$T<0$ 表示力矩企图使广义坐标 α 减小。如用矢量表示，应为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

可见载流回路所受的力矩的作用趋势是要使该回路包围尽可能多的磁通。本例的结果，完全适用于磁偶极子，也是电磁式电表的工作原理。

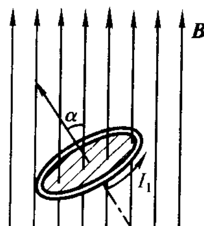


图 3-30 外磁场中的电流回路

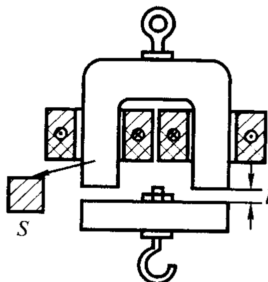


图 3-31 电磁铁

例 3-17 求图 3-31 所示电磁铁的起重力(设空气隙中的磁场均匀分布)。

解：由于电磁铁的钢心内部磁场强度很小，故储存在铁磁媒质中的磁场能量远小于储存于空气隙中的部分，因而，前者可以忽略不计。储存在每个空气隙中的磁场能量为

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}Sl = \frac{\Phi_m^2}{2\mu_0 S}l$$

作用在每个磁极上的总力为

$$f = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial l}\right|_{\Phi_m=\text{常量}} = -\frac{\Phi_m^2}{2\mu_0 S} \tag{3-94}$$

式中 $f<0$，表示该力要使广义坐标 l 减小，即有使气隙缩短的趋势。这样电磁铁的起重力应为

$$F = 2f = \frac{\Phi_m^2}{\mu_0 S} = \frac{B^2S}{\mu_0} \tag{3-95}$$

每单位面积的力

$$f_0 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \tag{3-96}$$

即磁场力面密度等于该处磁场能量体密度。

按照法拉弟的看法，每一束磁感应线所形成的磁感应管沿其轴向受到纵张力，同时在垂直方向受有侧压力。每单位面积上张力和压力的量值相等，都等于

$$\frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \tag{3-97}$$

应用法拉弟的看法，有时能较简便地算出磁场力并分析回路受力情况。例如对于电磁铁的起重力，可以考虑电磁铁气隙中的 B 管，沿轴向有收缩的趋势，因而在磁极表面上表现为吸力。应用法拉弟观点还可以证明，在两种媒质分界面上，磁场作用于单位面积上的力为

$$f_0 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_1\mu_2}\left(B_{1n}{}^2 + \mu_1\mu_2 H_{1t}{}^2\right) \tag{3-98}$$

并且不论磁场方向如何，此力总是垂直于该面积，总是由磁导率较大的媒质指向较小的媒质。

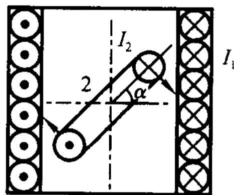
习　题　(3-8)

3-8-1　求无限长同轴电缆单位长度内导体和内外导体之间区域所储存的磁场能量。设内导体半径为 R_1，外导体很薄，半径为 R_2，内外导体及内外导体之间媒质的磁导率均为 μ_0，通有电流 I。

3-8-2　在题 3-7-2 的镯环线圈中，通以电流 $I=1$ A。求磁场能量：

(1) 用 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ 求解；

(2) 用 $W_m = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V$ 求解。



题 3-8-3 图

3-8-3　电动式仪表有两个线圈，其中一个固定不动，另一个可绕轴转动，如图所示。设两线圈中的电流分别为 I_1、I_2，且两线圈的互感为 $M(\alpha)$，试求线圈 2 所受的转矩。

§3-9　磁路及其计算

当磁场中存在有磁导率极高的材料(例如铁磁材料，又称铁磁质。它的 $\mu \gg \mu_0$，甚至大到几千、几万倍)时，将显著地影响并改变磁场的分布。求解这类磁

场问题一般是颇复杂的，但在工程应用上，常可作近似计算，把磁场简化为磁路来处理。本节介绍磁路的概念和磁路定律，并对恒定磁通磁路的计算进行讨论。

3.9.1 铁磁质和非铁磁质的分界面·磁路

现在讨论铁磁质与真空(或非铁磁质)分界面处磁场分布的特征。设分界面媒质 2 一侧为铁磁质，媒质 1 一侧为真空或非铁磁质。由磁场的折射规律(3-35)式，分界面两侧处磁感应强度的方向满足

$$\frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}=\frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

由于两种媒质磁导率相差悬殊，$\mu_{r1}\approx 1$，而 μ_{r2} 可达数千甚至数十万，因而除 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 的特殊情况外，一般总有 $\alpha_1\ll\alpha_2$，且常常是 $\alpha_2\approx 90°$，$\alpha_1\approx 0°$。这样铁磁质内 **B** 线几乎与分界面平行，而且也非常密集，μ_2 越大，α_2 越接近于 90°，**B** 线就越接近于与表面平行，从而漏到外面的磁通越小，即 **B** 在铁磁质内远大于其外，如图 3-32 所示。这种磁感应线分布的特征可以形象地比喻为"**B** 线沿铁走"，或定性地说：铁磁质具有把 **B** 线聚集于自己内部的性质。

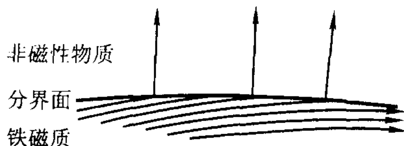


图 3-32 **B** 线集中在铁磁体内部

利用上述铁磁质与非铁磁质分界面处磁场分布的特征，如果铁磁质为闭合或基本闭合的形状，就会使 **B** 线基本上聚集在铁心内部。这一情况与电流几乎全部集中在导体内部相似。由于电流流经的区域称为电路，故把能使磁通集中通过的区域称为磁路。例如，图 3-33 (a) 所示为一个没有铁心的载流线圈产生的 **B** 线是弥散在整个空间的，若把同样的载流线圈绕在一个闭合或基本闭合的铁心上(图 3-33 (b) 或(c))，则不仅磁通量大大增加，而且这时绝大部分 **B** 线都集中于铁心内部且沿着铁心走向分布。这样，闭合的铁心或开有狭窄空气隙的铁心成为 **B** 线的主要通路，也就是所称的磁路。在电气工程和无线电技术中，很多需要较强磁场或较大磁通的设备(例如电机、变压器以及各种电感线圈等) 都采用了闭合或近似闭合的铁磁材料，即所谓铁心。绕在铁心上的线圈通以较小的电流(励磁电流)，便能得到较强的磁场，且磁场差不多约束在由铁磁质组成的磁路内，周围非铁磁质中的磁场则很弱。

磁路与电路有一系列对应的概念。磁路中的磁通 Φ 对应于电路中的电流，因为前者是 **B** 的通量而后者是 **J** 的通量，而 **B** 线和恒定电流的 **J** 线又都是连续曲线。当然，与传导电流只在电路中流动不同，在磁路的情况下，绝大部分 **B** 线是通过磁路(包括气隙) 闭合的，称为主磁通，用 Φ 表示；磁路外部也有 **B** 线，即

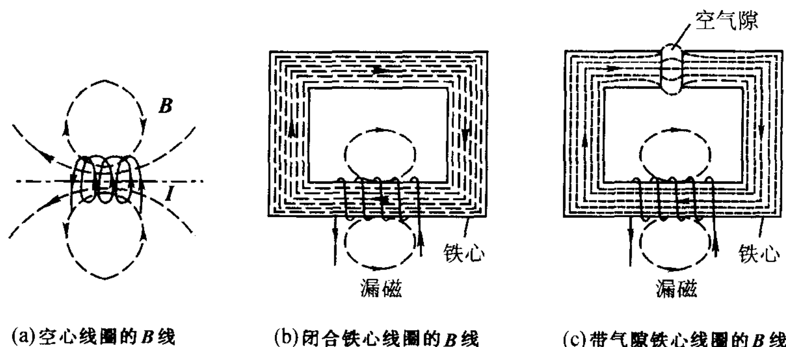


图 3－33　磁路

穿出铁心经过磁路周围非铁磁质(包括空气)而闭合的磁通,通常称为漏磁通。

3.9.2　磁路定律

在许多实际问题中计算铁心内的主磁通或 **B** 是很重要的。但在一般情况下，要精确地求得铁心的磁场分布比较困难，因为磁场的分布与线圈和铁心的形状密切相关。所以工程上一般都是利用磁路的方法近似地计算主磁通。磁场的基本方程用于给定的磁路时，在合理的近似下可以方便地求得磁场，并可以得出磁路近似计算的定律，其形式与电路的电路定律相同。

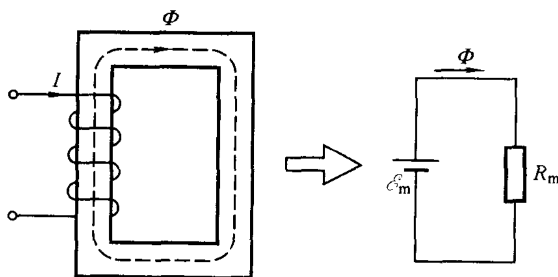


图 3－34　无分支闭合磁路

先讨论简单的无分支闭合铁心的磁路，如图 3－34 所示。把安培环路定律用于铁心中的一条闭合磁力线，有

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = NI \qquad (3-99)$$

其中 I 及 N 分别是线圈中的电流及匝数。因积分路径上各点的 $\boldsymbol{H}$（及 $\boldsymbol{B}$）与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 平行，故被积函数

$$\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{B}{\mu}\mathrm{d}l = \Phi\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}l}{S}$$

其中 S 是铁心横截面积。代入(3-99)式，注意到 Φ 对铁心各截面为常数，得

$$\Phi\cdot\oint_l \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}l}{S} = NI \tag{3-100}$$

对比一般导体的电阻公式 $R = \int_l \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}l}{S}$，自然把$\oint_l \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}l}{S}$ 叫做这个无分支闭合磁路的磁阻，记作

$$R_{\mathrm{m}} = \oint_l \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}l}{S} \tag{3-101}$$

其中磁导率 μ 与电导率 γ 对应。把上式代入(3-100)式，得

$$\Phi R_{\mathrm{m}} = NI$$

与全电路欧姆定律 $IR=\mathscr{E}$ 对比，自然把 NI 叫做磁路的磁动势，记作

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}} = NI \tag{3-102}$$

于是

$$\Phi R_{\mathrm{m}} = \mathscr{E}_{\mathrm{m}} \tag{3-103}$$

上式称为无分支闭合磁路的欧姆定律，即引入磁动势和磁阻之后，磁路中的磁通、磁动势和磁阻三者之间的关系与电路中的欧姆定律完全相似。图 3-34 中的铁心电感线圈的磁路对应于最简单的电路——无分支闭合电路。通电流的线圈对应于电路的电源，正是它激发起磁路中的磁通。

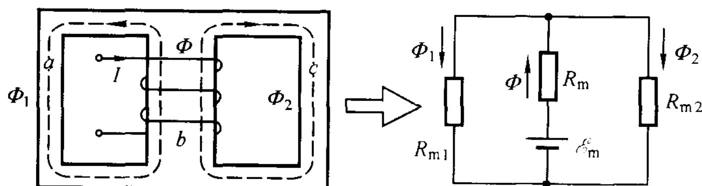


图 3-35 磁路的并联

当磁路存在分支时，一般说来各分支的磁通不相同。图 3-35 是一个有分支的磁路，对应于一个两节点、三支路的电路。如果忽略从铁心侧面漏出的 $\boldsymbol{B}$ 线，由磁通连续性原理$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ 不难知道联结同一节点的各支路的磁通代数和为零，这里就是

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \tag{3-104}$$

这一关系正与电路中基尔霍夫的节点电流方程相对应。

不但如此，对于任意复杂的磁路有：在磁路的每一个分支点上所连各支路的磁通代数和等于零，即

$$\sum \Phi_i = 0 \tag{3-105}$$

而对于每一个闭合回路，则有

$$\sum \Phi_i R_{mi} = \sum \mathscr{E}_{mi} \tag{3-106}$$

其内容是：在磁路的任意闭合回路中，各段磁路上的乘积值 $\Phi_i R_{mi}$（称作磁压）的代数和等于闭合回路中磁动势的代数和。

(3-105)和(3-106)式分别相应于电路的基尔霍夫第一定律和第二定律，总称磁路定律。这种磁路与电路的对应，可使我们将熟悉的电路计算方法移植过来计算磁路。为明了起见常画出简化磁路图。例如，对于图 3-34 所示磁路就可以看作是一磁阻与磁动势串联而成；对于图 3-35 所示磁路就可以看作是 a、c 二段磁阻并联后再与 b 段磁阻及磁动势串联而成。

应当指出，上述磁路定律是从磁场的基本方程——安培环路定律和磁通连续性原理出发，作了许多近似(例如不计漏磁，认为 **B** 线沿着铁心周线走向以及铁心截面上各处 **B** 均匀等)而得出的，因此实际上只是一种估算。这种估算对有关的工程技术问题是十分必要的。磁路的计算在电机、变压器、电磁铁和仪表设计中都有广泛的应用。

以上讨论的是不含永磁体的磁路。当磁路中有永磁体时，问题要复杂一些，因为永磁体本身也能激发磁场，本身也相当于一个磁动势，这个磁动势显然不能归结为 NI，讨论从略。

3.9.3　磁路的计算示例

这里只举例讨论磁通不随时间变化而为恒定值的磁路(称作恒定磁通磁路)的计算，其目的是在已知磁路结构、尺寸及材料的情况下，找出磁通与磁动势之间的关系。一般分为两类问题：一类是已知磁通求磁动势；另一类是已知磁动势求磁通。

例 3-18　已知图 3-34 中线圈的匝数 $N=300$，铁心的横截面积 $S=3\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2$，平均长度 $l=1\ \mathrm{m}$，铁磁质的 $\mu_r=2600$，欲在铁心中激发 3×10^{-3} Wb的磁通，线圈应通过多大的电流？

解：磁路的总磁阻

$$R_m = \frac{1}{\mu}\frac{l}{S} = \frac{1}{2600\times(4\pi\times10^{-7})}\cdot\frac{1}{3\times10^{-3}} = 10^5\quad 1/\mathrm{H}$$

磁路的磁动势

$$\mathscr{E}_m = \Phi R_m = (3\times10^{-3})\times10^5 = 300$$

故线圈应通过的电流

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{N} = \frac{300}{300} = 1\ \text{A}$$

例 3-19 如图 3-36 所示,在例 3-18 的铁心中开一长为 $l_g = 2\times10^{-3}$ m 的气隙，假定 ***B*** 线穿过气隙时所占面积扩展为 $S_2 = 4\times10^{-3}\ \text{m}^2$，欲维持铁心内磁通为 3×10^{-3} Wb，问线圈电流应增为多少?

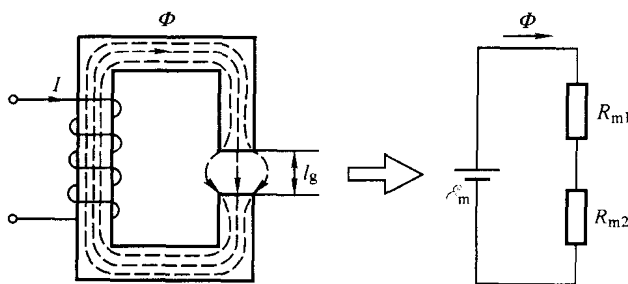


图 3-36 铁心中开一气隙——磁阻的串联

解：以 R_{m1}和 R_{m2}分别表示铁心及气隙的磁阻。开气隙后铁心长度变化很小，可以认为 R_{m1}等于上例的 R_m，即

$$R_{m1} = 10^5\ 1/\text{H}$$

而

$$R_{m2} = \frac{1}{\mu_0}\frac{l_g}{S} = \frac{1}{4\pi\times10^{-7}}\frac{2\times10^{-3}}{4\times10^{-3}} = 4\times10^5\ 1/\text{H}$$

总磁阻

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} = 5\times10^5\ 1/\text{H}$$

磁动势

$$\mathscr{E}_m = \Phi R_m = (3\times10^{-3})\times(5\times10^5) = 1500$$

故线圈电流应增为

$$I = \frac{\mathscr{E}_m}{N} = \frac{1\ 500}{300} = 5\ \text{A}$$

上例说明，虽然气隙很小(只占铁心长度的 0.2%)，但对总磁阻却有很大影响(使磁阻提高 5 倍)，这显然是由于空气磁导率比铁心磁导率小很多所致。由此可见，即使一个很小的气隙，它对器件的影响也是很大的。这里高磁阻的气隙起着主要的作用，整个磁路中的磁通 Φ 受着它的限制，正如同在串联电路中高电阻起主要作用一样。如果气隙再大，磁阻必将更高，为激发同一磁通所需电流必将更大。因此，变压器及一般铁心线圈都使用闭合铁心，只有在特

殊需要时某些铁心线圈才开有一个小气隙(如日光灯镇流器)。电机中由于必须有转动部分(转子)和不动部分(定子)，不可能使用完全闭合的铁心，为了减少磁阻，一般都把转子铁心和定子铁心之间的气隙做得很小。

以上两例的已知条件中都包含了铁磁质的 μ 值，但在实际工程问题中，因为铁磁质的非线性使得无法在确定其工作状态(H 或 B)之前确定其 μ 值。磁路计算的困难一般恰恰在于 B 与 H 不成线性关系，μ 随 H 值的不同而异。知道 B 要求 μ (或 H)需查 B—H 曲线或表格。求出各段磁路的磁压(ΦR_m 或 Hl)便可求出 NI。如果给出 NI，要求磁通 Φ 时，则需按实际情况估算磁通，例如把回路的全部磁动势看成只等于气隙的磁压，进行估算，然后作些修改，寻求一个能满足(3-106)式的磁通。一般常需计算若干次才能得到满意的结果。显然，这是一种试探法，实质上是已知磁路磁通求磁动势的多次计算方法。

3.9.4　磁屏蔽

在实际中(例如做精密的磁场测量实验时)有时需要把一部分空间屏蔽起来，免受外界磁场的干扰。上述铁心具有把 **B** 线集中到内部的性质，提供了制造磁屏蔽的可能性。如图 3-37所示，一个高 μ 值铁磁质制成的屏蔽罩就能起到这样的作用，其道理可借助磁阻的并联来说明。罩与空腔可看作并联的磁阻，由于空腔的磁导率 μ_0 远小于罩的磁导率 μ，其磁阻远大于罩的磁阻，于是来自外界的 **B** 线绝大部分将沿着空腔两侧的铁壳壁内“通过”，“进入”空腔内部的很少。这就可以达到屏蔽的目的。

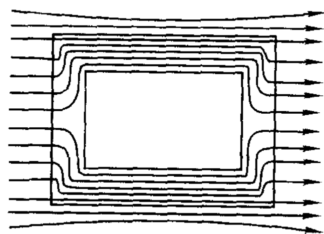


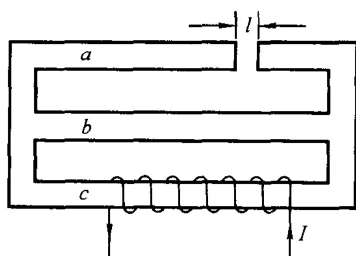
图 3-37　铁磁屏蔽

应当指出的是，和闭合导体空腔内静电场为零不同，外磁场中闭合铁磁质空腔中的磁场并不为零，因而屏蔽的效果远不如静电屏蔽的效果。要改善屏蔽的效果，可以采用较厚的屏蔽罩或多层铁壳的方法，把漏进空腔内的残余磁通一次次地屏蔽掉。另外，这种磁屏蔽方法不宜用于屏蔽高频交变磁场，因为这会在铁磁屏蔽罩中引起很大的铁损。

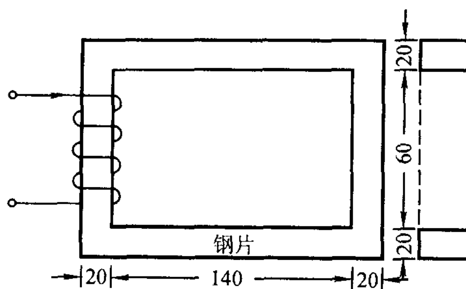
习　题　(3-9)

3-9-1　一电磁铁铁心的形状如图所示，线圈匝数为 1 000，空气隙长度 $l=2.0$mm，磁路的 a、b、c 三段长度与截面面积都相等，气隙的磁阻比它们每段大 30 倍，当线圈中有电流 $I=1.8$A 时，气隙内的磁感应强度 **B** 为多少？(忽略漏磁通及左右边框的磁阻。)

3-9-2　附图所示磁路由铸钢和电工钢片构成，尺寸单位为毫米，若要使铸钢中的磁通为 3.2×10^{-4}Wb，求所需的磁动势(铸钢和电工钢片的基本磁化曲线用下列表格表示)。



题 3-9-1 图



题 3-9-2 图

铸　钢

$H/(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100
B/T	0.27	0.39	0.50	0.61	0.72	0.82	0.90	0.98	1.05	1.11

电 工 钢 片

$H/(\mathrm{A\cdot m^{-1}})$	40	60	80	100	120	140	160	180	200	/
B/T	0.12	0.30	0.45	0.57	0.65	0.70	0.76	0.80	0.85	/

提　要

1. 安培定律表明，真空中两个电流回路之间的相互作用力

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l \oint_{l'} \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times (I'\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R)}{R^2}$$

式中，$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m。

2. 磁场的基本物理量是磁感应强度，由毕奥-沙伐定律可知，真空中线电流回路 l'引起的磁感应强度

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'} \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}$$

体分布及面分布的电流引起的磁感应强度分别为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(x',y',z') \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V'$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\boldsymbol{K}(x',y',z') \times \boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S'$$

3. 导磁媒质的磁化程度，可用磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 表示

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{m}_i}{\Delta V}$$

导磁媒质对磁场的作用，可看作是由磁化电流产生的磁感应强度所致。磁化电流的面密度和线密度与磁化强度的关系分别是

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}=\nabla\times\boldsymbol{M}\qquad \boldsymbol{K}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n$$

4. 安培环路定律在真空中的形式是

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$$

式中 I 是穿过回路 l 所限定面积 S 的电流。

引入磁场强度　$\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$

可得一般形式的安培环路定律

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I$$

式中等号右边仅指自由电流。

5. 对于线性媒质，磁化强度与磁场强度之间有 $\boldsymbol{M}=\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}$，式中 χ_{m} 为磁化率。

磁感应强度则等于　$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$

式中磁导率　$\mu=\mu_{\mathrm{r}}\mu_0=(1+\chi_{\mathrm{m}})\mu_0$

6. 恒定磁场基本方程的积分形式和微分形式分别是

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0\qquad \nabla\cdot B=0$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$$

在两种不同媒质分界面上，衔接条件为

$$B_{2n}-B_{1n}=0$$

$$H_{1t}-H_{2t}=K$$

7. 根据磁通的连续性，即 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，可以引入磁矢位 $\boldsymbol{A}$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$

对于不同形式的元电流段，当电流分布在有限空间，磁矢位的计算式为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{R}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(x',y',z')\,\mathrm{d}V'}{R}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{K}(x',y',z')\,\mathrm{d}S'}{R}$$

磁矢位满足泊松方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J}$$

8. 在无电流($\boldsymbol{J}=0$)区域，可以定义磁位 φ_{m}，使

$$\boldsymbol{H} = -\nabla \varphi_{\mathrm{m}}$$

和静电场中电位相仿，磁位也满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{m}} = 0$$

9. 在磁场中也可用镜像法，即用镜像电流代替分布在分界面的磁化电流的影响，以求得满足给定边界条件的解答。

10. 电感有自感和互感之分，它们分别定义为

$$L = \frac{\Psi_L}{I} \qquad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

计算电感应先求磁通。磁通可以通过下列关系式之一求得

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad \Phi_{\mathrm{m}} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

11. 一个电流回路系统的磁场改变时，与它们相联的外电源所做之功为

$$\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{n} I_k \Psi_k$$

其中不包括供给回路电阻的焦耳热。

在线性媒质中，电流回路系统的能量为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} I_k \Psi_k$$

对于连续的电流分布，磁场能量可写成

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V$$

磁场能量还可表示成

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V$$

式中

$$w'_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}$$

为磁场能量的体密度。

12. 运动电荷在磁场中的受力可用 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 计算。载流导体在磁场中受力可用 $\boldsymbol{F} = \oint_l I \, \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$ 计算。

磁场力也可以应用虚功原理计算

$$f = -\left.\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\right|_{\Psi = \text{常量}} \qquad f = +\left.\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\right|_{I = \text{常量}}$$

磁场力也可应用法拉弟观点进行分析。纵张力与侧压力都等于 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$。

13. 铁磁物质具有高磁导率及非线性和磁滞性。由铁磁物质所组成的，能使磁通集中通过的整体称为磁路。

磁路的三个基本定律反映磁动势、磁通和磁路结构三者之间的关系，它们分别为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=R_{\mathrm{m}}\Phi \qquad \sum\Phi_i=0 \qquad \sum H_k l_k=\sum N_k I_k$$

利用磁路定律，讨论了恒定磁通磁路的计算。

思　考　题

3-1　在均匀磁场中，能否证明通电流 I 的闭合线圈所受合力为零。

3-2　静电场中由 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ 引入了电位 φ，而恒定磁场中引入了 φ_{m}，所以恒定磁场必有 $\nabla\times\boldsymbol{H}=0$。

3-3　在什么条件下，两种不同媒质分界面一侧的 $\boldsymbol{B}$ 线垂直于分界面。

3-4　解决磁位多值性的方法是什么？磁位的适用条件是什么？

3-5　平行平面磁场中 $\boldsymbol{B}$ 线即为等 A 线的含义是什么？

3-6　两线圈 L_1、L_2 的形状、尺寸和相互间距离不改变，当

(1) 两线圈处在铁板同一侧时

(2) 铁板放在两线圈之间时

请回答，两线圈的自感、互感将如何发生变化？

3-7　在无限大被均匀磁化的导磁媒质中，有一圆柱形空腔，其轴线平行于磁化强度 $\boldsymbol{M}$，则空腔中一点 P 的磁场强度 $\boldsymbol{H}_P$ 与导磁媒质中的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 满足什么关系？

3-8　磁矢位在 $\mu\rightarrow\infty$ 的铁磁质与空气分界面上所满足的衔接条件是什么？

3-9　载流回路 l_1 单独作用时，在空间产生 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_1$，载流回路 l_2 单独作用时在空间产生 $\boldsymbol{B}_2$ 和 $\boldsymbol{H}_2$，当两者同时作用时，在空间总的能量密度 w'_{m} 等于什么？

3-10　由自由电流激发的磁场中，存在有导磁媒质时，磁场仅由自由电流产生吗？还应考虑什么的共同作用？

3-11　何谓媒质的磁化？表征磁化程度的物理量是什么？它是如何定义的？如何考虑媒质在磁场中的效应？

3-12　在两维场中，$\boldsymbol{B}$ 线即等 A 线、能否说等 A 线上各点的 $\boldsymbol{B}$ 值都相等，为什么？

3-13　列出自感计算的步骤，自感、互感与哪些因素有关？现有一个线圈置于空气中，其周围放入一块铁磁物质，此线圈的自感有何变化？如果放入一块铜，自感有何变化？

3-14　总结磁场能量的计算方法。何谓自有能和互有能？现有的磁场能量计算公式能否适用于非线性媒质？试解释之？

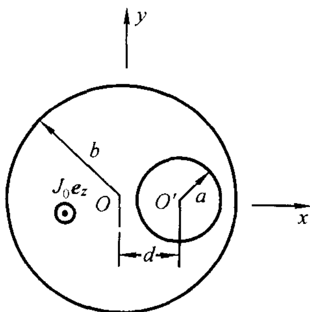
习　　题

3-1　四条平行的载流 I 无限长直导线垂直地通过一边长为 a 的正方形顶点，求正方

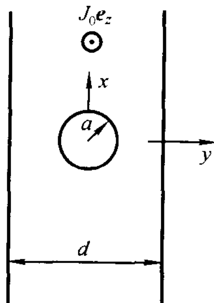
形中心点 P 处的磁感应强度值。

3-2　真空中，在 $z=0$ 平面上的 $0<x<10$ 和 $y>0$ 范围内，有以线密度 $\boldsymbol{K}=500\boldsymbol{e}_y$ A/m 均匀分布的电流，求在点(0,0,5)产生的磁感应强度。

3-3　真空中，一通有电流（密度 $\boldsymbol{J}=J_0\boldsymbol{e}_z$），半径为 b 的无限长圆柱内，有一半径为 a 不同轴圆柱形空洞，两轴线之间相距 d，如附图所示，求空洞内的 $\boldsymbol{B}$。



题 3-3 图



题 3-4 图

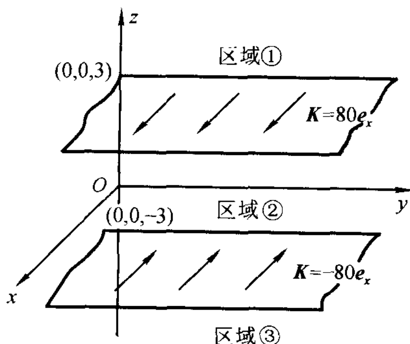
3-4　真空中，有一厚度为 d，无限大载流（均匀密度 $J_0\boldsymbol{e}_z$）平板，在其中心位置有一半径等于 a 的圆柱形空洞，如附图所示。求各处的磁感应强度。

3-5　一电流线密度为 $\boldsymbol{K}=K_0\boldsymbol{e}_z$ 的无限大电流片置于 $x=0$ 平面，如取 $z=0$ 平面上半径为 a 的一个圆为积分回路，求 $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。

3-6　附图所示两无限大电流片，试分别确定区域①，②和③中的 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{M}$。设已知：

(1) 所有区域 $\mu_r=0.998$；

(2) 区域②中 $\mu_r=1000$，区域①及③中 $\mu=\mu_0$。



题 3-6 图

3-7　半径为 a，长度为 l 的圆柱，被永久磁化到磁化强度为 $M_0\boldsymbol{e}_z$。(z 轴就是圆柱的轴线)。

(1) 求沿轴各处的 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{H}$。

(2) 求远离圆柱（$\rho\gg a,\rho\gg l$）处的磁场。

3-8　有一圆形截面铁环，环的内外半径分别为 10 cm 与 12 cm，铁环的 $\mu_r=500$，环上绕有 50 匝通有 2A 电流的线圈，求环的圆截面内外的磁场强度与磁感应强度（忽略漏磁，且环外磁导率为 μ_0）。

3-9　已知在 $z>0$ 区域中 $\mu_{r1}=4$，在 $z<0$ 区域中，$\mu_{r2}=1$。设在 $z>0$ 处 $\boldsymbol{B}$ 是均匀的，其方向为 $\theta=60°,\phi=45°$，量值为 1 Wb/m^2，试求 $z<0$ 处的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$。

3-10　对真空中下列电流分布，求 $\boldsymbol{B}$：

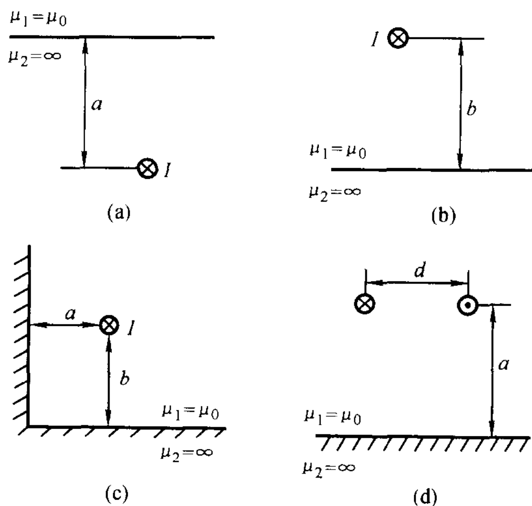
(1) $\boldsymbol{J}=J_0\dfrac{y}{a}\boldsymbol{e}_z\quad -a<y<a$；　　(2) $\boldsymbol{J}=J_0\dfrac{\rho}{a}\boldsymbol{e}_z\quad \rho<a$

3-11　对于真空中下列电流分布求磁矢位及磁感应强度：

(1) 半径为 a 的无限长圆柱，带有面电流，电流线密度 $\boldsymbol{K}=K_0\boldsymbol{e}_z$；

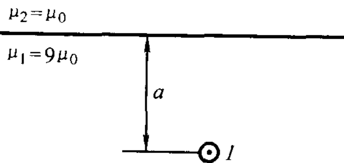
(2) 厚度为 d 的无限长电流片，通有电流，电流面密度 $\boldsymbol{J}=J_0\boldsymbol{e}_z$。

3-12　点出附图所示各种情况下的镜像电流，注明电流的方向、量值及有效的计算区域。



题 3-12 图

3-13　在磁导率为 μ_1 的媒质 1 中，有载流直导线与两媒质分界面平行，垂直距离为 a。设 $\mu_2=\mu_0$，$\mu_1=9\mu_0$。参阅附图，求两种媒质中的磁场强度和载流导线每单位长度所受的力。并回答对于 μ_2 媒质中的磁场，由于 μ_1 的存在，磁场强度比全部为均匀媒质(μ_2)时大还是小。



题 3-13 图

3-14　求附图所示两同轴导体壳系统中储存的磁场能量及自感。

3-15　如图所示，计算两平行长直导线对中间线框的互感；当线框通有电流 I_2，且线框为不变形的刚体时，求长导线对它的作用力。

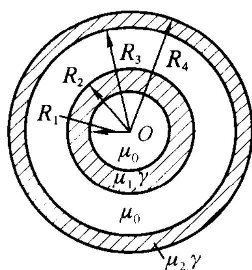
3-16　若要计算附图中导线与线框之间的互感，请给出所需镜像电流的大小、方向及位置，并给出此时导线与线框的互感。

3-17　对于附图所示厚度为 D (垂直于纸面方向)的磁路，求：

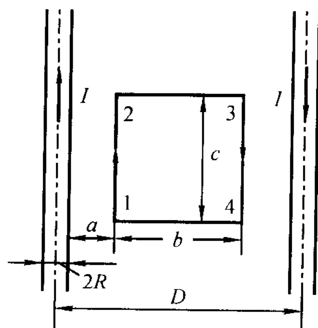
(1) 线圈的自感；

(2) 可动部件所受的力。

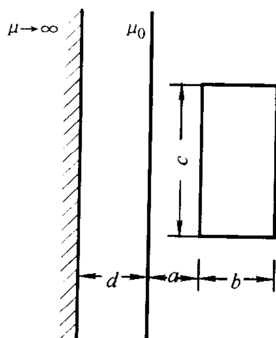
3-18　试证明，在两种媒质的分界面上，不论磁场方向如何，磁场力总是垂直于分界面，且总是由磁导率大的媒质指向磁导率小的媒质。



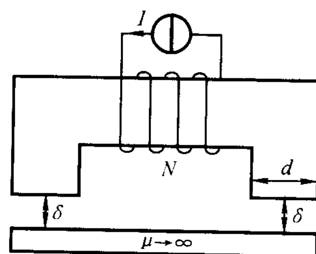
题 3－14 图



题 3－15 图



题 3－16 图



题 3－17 图

第四章 时变电磁场

本章讨论随时间变化的电磁场。在时变电磁场中，电场和磁场不仅是空间坐标的函数，还是时间的函数。它们不再彼此独立，而是构成统一的电磁场的两个方面。变化的电场会产生磁场；另一方面，变化的磁场也会产生电场。它们两者互为因果关系。麦克斯韦用最简洁的数学公式——电磁场基本方程组高度概括了电磁场的基本特性，成为研究电磁现象的理论基础。

本章首先从法拉弟电磁感应定律引出感应电场的概念，然后介绍麦克斯韦关于位移电流的假设以及表征时变电磁场特性的电磁场基本方程组，并由此导出时变电磁场的能量守恒定律——坡印亭定理，同时介绍表征功率流密度的坡印亭矢量。为了便于计算电磁场，引入动态位函数及其方程，最后对正弦电磁场展开讨论。

§4-1 电磁感应定律和全电流定律

前面各章分别讨论了静止电荷的电场和恒定电流的电场和磁场。它们都不随时间变化，而且彼此独立无关。从这一章开始，将讨论随时间变化的电场和磁场。把随时间变化的电场和磁场统称为时变电磁场。本节将介绍时变电磁场中两个最基本的定律——电磁感应定律和全电流定律，它们反映了时变的电场及磁场之间相互依存和转化的关系。

4.1.1 电磁感应定律

大量的实验证实存在着如下的普遍规律：当穿过一闭合导体回路的磁通(不论由于什么原因)发生变化时，在导体回路中就会出现电流，这种现象称为电磁感应现象，出现的电流称为感应电流。

导体回路中出现感应电流是导体回路中必然存在着某种电动势的反映，这种由电磁感应引起的电动势叫做感应电动势。法拉弟对电磁感应现象作了精心的研究，总结出电磁感应定律如下：闭合回路中的感应电动势 $\mathscr{E}$ 与穿过此回路的磁通 Φ_{m} 随时间的变化率 $\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$ 成正比。其数学形式是

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4-1}$$

这里规定感应电动势的参考方向与穿过该回路磁通 Φ_m 的参考方向符合右手螺旋关系。式中的 S 是由闭合回路的周界 l 所限定的面积，面积的正法线方向和 l 的绕向应符合右手螺旋关系。

从(4-1)式知，闭合回路磁通变化的原因不外有下面三种：

(1)$\boldsymbol{B}$ 随时间变化而闭合回路的任一部分对媒质没有相对运动。这样产生的感应电动势叫做感生电动势。这时，(4-1)式可表示为

$$\mathscr{E} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4-2}$$

变压器就是利用这一原理制成的，所以也称这一感应电动势为变压器电动势。

(2)$\boldsymbol{B}$ 不随时间变化(恒定磁场)而闭合回路的整体或局部相对于媒质在运动。这样产生的感应电动势叫做动生电动势。这时，(4-1)式可表示为

$$\mathscr{E} = \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4-3}$$

这正是发电机的工作原理，故称之为发电机电动势。

(3)$\boldsymbol{B}$ 随时间变化且闭合回路也有运动。这时的感应电动势是感生电动势和动生电动势的叠加。即

$$\mathscr{E} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4-4}$$

电磁感应定律使我们能够根据磁通的变化率直接确定感应电动势。至于感应电流，则还要知道闭合回路的电阻才能求得。对于给定的导体回路，感应电流与感应电动势成正比。如果回路并不闭合(或者说电阻为无限大)，则虽有感应电动势却没有感应电流。因此，在理解电磁感应现象时，感应电动势是比感应电流更为本质的物理量。感应电动势的大小只与穿过回路磁通随时间的变化率有关，而与构成回路的材料的特性无关。因此，电磁感应定律可以推广到任意媒质内的假想回路中。

4.1.2　感应电场(涡旋电场)

从第二章中可知，电动势是非保守电场的环路线积分，回路中存在感应电动势说明回路中有非保守电场。麦克斯韦假设：除了电荷产生电场外，变化的磁场也总要在空间产生电场，由变化磁场产生的电场，称为感应电场，记作 $\boldsymbol{E}_i$。变化的磁场在固定不动的导体回路中产生的感应电流就是由这种感应电场引起的。

应该注意，法拉弟建立的电磁感应定律是对一个回路而言的，而上述麦克斯韦的假设并无此限制，即认为不论空间有无导体，有无回路，不论是在真空中或媒质中它都适用。这一假设为无数实验所证实而被公认为是反映客观规律

的理论。

由电动势的定义可知，回路中的感应电动势 $\mathscr{E}$ 应为

$$\mathscr{E} = \oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4-5}$$

由电磁感应定律

$$\begin{aligned}\oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} &= -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\end{aligned} \tag{4-6}$$

上式就是感应电场与变化磁场的定量关系式。它表明，感应电场的环量不等于零，与静电场不同，感应电场是非保守场，它的力线是一些无头无尾的闭合曲线，所以感应电场又称为涡旋电场。

一般情况下，空间中既存在电荷产生的电场也存在感应电场。麦克斯韦将上述关系推广，对任何电磁场都有

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \oint_l (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4-7}$$

这里 $\boldsymbol{E}$ 表示空间的总场强。

应用斯托克斯定理，可得对应上式的微分形式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{4-8}$$

这是电磁感应定律的微分形式。在静止媒质中，则有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4-9}$$

麦克斯韦将上述关系作为电磁场的基本方程之一。它揭示了变化磁场产生电场这一重要的物理本质，从而把电场与磁场更紧密地联系在一起。

4.1.3 全电流定律

感应电场的概念揭开了电场与磁场联系的一个方面——变化的磁场要产生电场。在研究从库仑到法拉弟等前人成果的基础上，深信电场、磁场有着密切关系且具有对称性的麦克斯韦，为解决把安培环路定律应用到非恒定电流电路时所遇到的矛盾，又提出了“位移电流”的假说——随时间变化的电场将激发磁场，从而揭示了电场与磁场联系的另一个方面。麦克斯韦对电磁场理论的重大贡献的核心是位移电流的假说。

恒定磁场的安培环路定律具有如下形式

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I \tag{4-10}$$

现在研究图 4-1 所示含有电容 C 的交变电流电路。将安培环路定律应用于闭合曲线 l，显然，对于 S_1 面有

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S_1} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = i$$

而对 S_2 面

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S_2} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

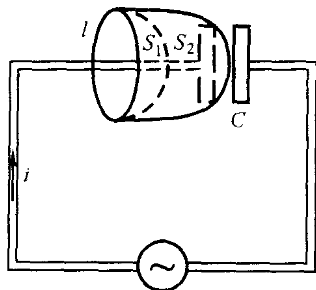


图 4-1 在非恒定情况用安培环路定律

上面两式是互相矛盾的，这个矛盾的直接原因是传导电流不连续。这样看来，在恒定情况下得到的安培环路定律(4-10)式，一般说来不能直接应用到时变电流(非恒定)情况，必须加以修正。

麦克斯韦注意到电容器极板处传导电流的不连续引起极板上电荷量的变化，因而产生变化的电场，存在$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$。设想在电容器极板间亦有某种“电流”通过，它与电场的变化率$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$相联系，且在量值上与同时刻电路中的传导电流相等，即保持“电流”闭合，那么这个开口就被“连上”，形式上这个矛盾就可以解决。麦克斯韦把电位移(电通密度)$\boldsymbol{D}$ 的变化率看作是一种等效电流密度，称为位移电流密度。这样，在传导电流中断的地方，就有位移电流接上去。传导电流与位移电流的总和，称为全电流，则是连续的。如果用 $\boldsymbol{J}_\mathrm{d}$ 表示位移电流的密度，则

$$\oint_S (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_\mathrm{d}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (4-11)$$

这就是麦克斯韦关于位移电流的假设。麦克斯韦认为，磁场对任意闭合曲线的积分取决于通过该路径所包围面积的全电流，即

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_\mathrm{d}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (4-12)$$

从引入位移电流的过程看，位移电流这一概念似乎只有形式上的意义，但是通过以后的讨论就会看到，它非常深刻地反映了电磁现象的物理实质。根据(4-11)式，全电流具有闭合性，因此有

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_S \boldsymbol{J}_\mathrm{d} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由电荷守恒定律 $\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，以及高斯定律$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$，可得

$$\oint_S \boldsymbol{J}_\mathrm{d} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因为 S 为任意形状的封闭曲面，因此被积函数相等

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4-13}$$

即位移电流密度等于电位移(电通密度)的变化率，这与上面定性分析的结果一致。这样，对于非恒定的电流，安培环路定律修改成为

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{4-14}$$

上式称为全电流定律。与它相应的微分形式是

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4-15}$$

(4－14)和(4－15)两式揭示了一个新的物理内容：不但传导电流 $\boldsymbol{J}$ 能够激发磁场，而且位移电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$ 也以相同的方式激发磁场。位移电流这一所谓形式上的概念反映了变化的电场与电流一样，也能激发磁场这一物理实质。

应该注意到,位移电流和传导电流是两个不同的物理概念,它们的共同性质是按相同的规律激发磁场,而其它方面则是截然不同的。真空中的位移电流仅对应于电场的变化,而不伴有电荷的任何运动。其次,位移电流不产生焦耳热,对于真空这是很明显的。在电介质中由于$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$项的存在,位移电流会产生热效应,然而这和传导电流通过导体产生焦耳热不同,它遵从完全不同的规律。

4.1.4　电磁场

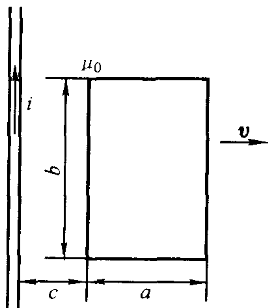
按照位移电流的概念，任何随时间而变化的电场，都要在邻近空间激发磁场。一般说来，随时间变化的电场所激发的磁场也随时间变化。概括地讲：充满变化电场的空间，同时也充满变化的磁场。

按照感应电场的概念，任何随时间而变化的磁场，都要在邻近空间激发感应电场，一般说来，随时间变化的磁场所激发的电场也随时间变化。因而，充满变化磁场的空间，同时充满变化的电场。

这两种变化的场,电场和磁场,永远互相联系着,形成了统一的电磁场。在此基础上麦克斯韦又预言了电磁波(变化电磁场在空间的传播)的存在，且算出电磁波的传播速度与光速一样。这些预言于 1888 年为赫兹用实验得到证实。从此，电磁感应定律和全电流定律便被确认为反映普遍的电磁规律的客观真理。

习　题　(4－1)

4－1－1　长直导线载有电流 $i = I_{\mathrm{m}}\sin\omega t$，在其附近有一矩形线框，线框以速度 $\boldsymbol{v}$ 向远离导线的方向移动，如题 4－1－1 图所示。求线框中的感应电动势。



题 4-1-1 图

4-1-2 设电场强度$E(t)=E_m\cos\omega t$ V/m，$\omega=10^3$ rad/s。计算下列各种媒质中的传导电流密度和位移电流密度之幅值的比值：

(1) 铜 $\gamma=5.8\times10^7$ S/m，$\varepsilon_r=1$；

(2) 蒸馏水 $\gamma=2\times10^{-4}$ S/m，$\varepsilon_r=80$；

(3) 聚苯乙烯 $\gamma=10^{-16}$ S/m，$\varepsilon_r=2.53$。

§4-2 电磁场基本方程组·分界面上的衔接条件

这一节将系统地总结有关电磁场的基本规律，并建立完整的电磁场理论——电磁场基本方程组。最后，在电磁场基本方程组积分形式的基础上导出分界面上的衔接条件。

4.2.1 电磁场基本方程组

把前面几章所得到的结论加以总结和推广，结合位移电流的假说，就可以得到概括电磁现象规律的四个方程式，通常称之为电磁场基本方程组。这一总结工作是由麦克斯韦完成的，故电磁场基本方程组又称为麦克斯韦方程组，其积分形式为

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_S\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4-16}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_S\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4-17}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{4-18}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}=q \tag{4-19}$$

(4-16)式是全电流定律，亦称为麦克斯韦第一方程。它表明不仅传导电流能产生磁场，而且变化的电场也能产生磁场。(4-17)式是推广的电磁感应定律，

称为麦克斯韦第二方程，表明变化的磁场也会产生电场。(4－18)式是磁通连续性原理，说明磁力线是无头无尾的闭合曲线。这一方程式原来是在恒定磁场中得到的，麦克斯韦把它推广到变化的磁场中。(4－19)式是高斯定律，它反映了电荷以发散的方式产生电场。这组方程表明变化的电场和变化的磁场相互激发、相互联系形成统一的电磁场。

容易得到，电磁场基本方程组的微分形式为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{4-20}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4-21}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4-22}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \tag{4-23}$$

在有媒质存在时，上述电磁场基本方程组尚不完备，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都和媒质的特性有关。因此，还需要补充三个描述媒质特性的方程式。对于各向同性的媒质来说，有

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{4-24}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{4-25}$$

$$\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E} \tag{4-26}$$

这里 ϵ、μ 和 γ 分别是媒质的介电常数、磁导率和电导率。(4－24)式～(4－26)式常称为电磁场的辅助方程或构成关系。

电磁场基本方程组全面总结了电磁场的规律，是宏观电磁场理论的基础。它在电磁场理论中的地位与牛顿定律在经典力学中的地位相仿。利用这组方程加上辅助方程原则上可以解决各种宏观电磁场问题。例如在具体问题中给出电磁场量的初始条件与边界条件，则求解方程组可得 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ 和 $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$。这就是说，当电荷、电流给定时，从电磁场基本方程组根据初始条件以及边界条件就可以完全决定电磁场的变化。这就是电磁场中的唯一性定理。

例 4－1 在无源的自由空间中，已知磁场强度

$$\boldsymbol{H}=2.63\times10^{-5}\cos(3\times10^{9}t-10z)\,\boldsymbol{e}_y\ \text{A/m}$$

求位移电流密度 $\boldsymbol{J}_\text{d}$。

解： 由于 $\boldsymbol{J}=0$，麦克斯韦第一方程成为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$$

所以，得

$$\boldsymbol{J}_\text{d}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{e}_x\frac{\partial H_y}{\partial z}$$

$$=-2.63\times10^{-4}\sin(3\times10^{9}t-10z)\,\boldsymbol{e}_x\ \text{A/m}^2$$

例 4-2 在无源区域中，已知调频广播电台辐射的电磁场的电场强度

$$\boldsymbol{E} = 10^{-2}\sin(6.28\times10^{9}t - 20.9z)\,\boldsymbol{e}_y \text{ V/m}$$

求空间任一点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解： 由麦克斯韦第二方程，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_x$$

$$= -20.9\times10^{-2}\cos(6.28\times10^{9}t - 20.9z)\,\boldsymbol{e}_x$$

将上式对时间 t 积分，若不考虑静态场，则有

$$\boldsymbol{B} = \int \frac{\partial E_y}{\partial z}\boldsymbol{e}_y \mathrm{d}t$$

$$= -3.33\times10^{-11}\sin(6.28\times10^{9}t - 20.9z)\,\boldsymbol{e}_x \text{ T}$$

4.2.2 分界面上的衔接条件

考虑两种不同的媒质，ε_1 和 μ_1 分别表示第一种媒质的介电常数和磁导率，ε_2 和 μ_2 分别表示第二种媒质的介电常数和磁导率。$\boldsymbol{e}_n$ 为分界面上的法向单位矢量，其方向由媒质 1 指向媒质 2，如图 4-2 所示。与静电场和恒定磁场中推导分界面上的衔接条件所用的方法完全相似，把(4-18)式和(4-19)式应用于跨在分界面两侧的扁盒形封闭面，在极限条件下，就可得到 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所满足的条件。把(4-16)式和(4-17)式应用于跨在分界面两侧的矩形闭合路径，就可得到 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量所满足的条件。所得到的分界面上的衔接条件是

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{4-27}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \tag{4-28}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K \tag{4-29}$$

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{4-30}$$

式中 σ 为分界面上的自由电荷面密度，K 为传导电流的线密度。

上述分界面上的衔接条件表明：$\boldsymbol{E}$ 的切向分量和 $\boldsymbol{B}$ 的法向分量总是连续的。在有自由电荷和传导电流分布的分界面上，$\boldsymbol{D}$ 的法向分量和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量都是不连续的。

当分界面上不存在面自由电荷和传导电流线密度时，显然可以得到

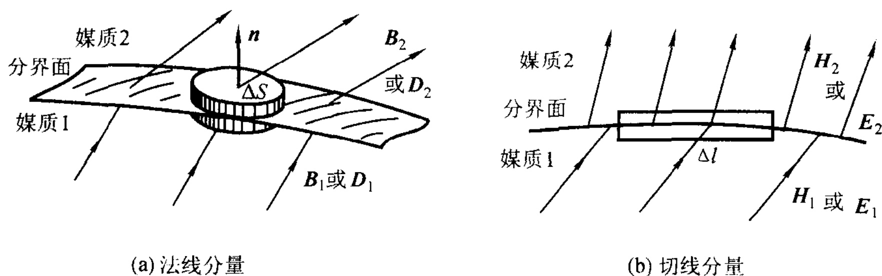
$$E_1\sin\alpha_1 = E_2\sin\alpha_2$$

$$\varepsilon_1 E_1\cos\alpha_1 = \varepsilon_2 E_2\cos\alpha_2$$

及

$$H_1\sin\beta_1 = H_2\sin\beta_2$$

$$\mu_1 H_1\cos\beta_1 = \mu_2 H_2\cos\beta_2$$



(a) 法线分量　　　(b) 切线分量

图 4－2　推导不同媒质分界面上的衔接条件

式中 α_1、α_2 分别为 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 与分界面法线间的夹角；β_1、β_2 分别为 $\boldsymbol{H}_1$、$\boldsymbol{H}_2$ 与分界面法线间的夹角。从上列各式可得到

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{4-31}$$

及

$$\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{4-32}$$

以上两式就是电磁场的折射定律。

4.2.3　理想导体表面上的边界条件

在实际问题中，往往把某些导体看成理想导体以简化问题的分析。由于理想导体的电导率 $\gamma \rightarrow \infty$，所以它内部的电场强度为零。根据方程(4－21)式，可知理想导体内部的时变磁场也为零(不考虑与时间无关的常量)。理想导体中的电流可以看成是沿着导体表面流动而形成面电流，同时表面也会有自由电荷的积累而形成面电荷，因而在理想导体(设为媒质 1)与电介质(设为媒质 2)的分界面上，衔接条件为

$$\left.\begin{aligned} H_{2t} &= K \\ B_{2n} &= 0 \\ E_{2t} &= 0 \\ D_{2n} &= \sigma \end{aligned}\right\} \tag{4-33}$$

也称为理想导体表面上的边界条件。它表明：在理想导体表面外侧的附近介质中，磁力线平行于其表面，电力线则与其表面相垂直。

例 4－3　比较导体中的传导电流和位移电流的大小。设导体中存在电场，电场强度为 $E_{\mathrm{m}}\sin \omega t$，导体的电导率 $\gamma=10^7$ S/m，介电常数 $\varepsilon=\varepsilon_0$。

解：根据欧姆定律的微分形式，导体中的传导电流密度为

$$J=\gamma E=\gamma E_{\mathrm{m}}\sin \omega t$$

导体中的位移电流密度为

$$J_{\mathrm{d}} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E_{\mathrm{m}} \sin \omega t) = \varepsilon_0 E_{\mathrm{m}} \omega \cos \omega t$$

$$\left|\frac{J_{\mathrm{d}}}{J}\right| = \frac{\omega \varepsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-17} f$$

其中 $\omega = 2\pi f$。当频率低于光波频率 $f \approx 10^{13}$Hz 时，在良导体中，位移电流与传导电流相比，是微不足道的。

例 4-4 在两块导电平板 $z=0$ 和 $z=d$ 之间的空气中传播的电磁波的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = E_0 \sin \frac{\pi}{d} z \cos(\omega t - \beta x)\, \boldsymbol{e}_y$$

其中 β 为常数。试求：(1)磁场强度 $\boldsymbol{H}$；(2)两块导电平板表面上的电流线密度 $\boldsymbol{K}$。

解：(1)由麦克斯韦第二方程 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$，得到

$$-\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mu_0} \int \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \boldsymbol{e}_y \right) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{E_0}{\mu_0 \omega} \left[\frac{\pi}{d} \cos \frac{\pi z}{d} \sin(\omega t - \beta x)\, \boldsymbol{e}_x + \beta \sin \frac{\pi z}{d} \cos(\omega t - \beta x)\, \boldsymbol{e}_z \right]$$

容易验证，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都满足理想导体表面的边界条件。导体表面没有电场的法向分量，故没有表面电荷。

(2) 导体表面线电流存在于两块导电板相对的一面。在 $z=0$ 的表面上，电流线密度 $\boldsymbol{K}_1$ 为

$$\boldsymbol{K}_1 = |\, \boldsymbol{H} \,|_{z=0} \boldsymbol{e}_y = \frac{\pi E_0}{\mu_0 \omega d} \sin(\omega t - \beta x)\, \boldsymbol{e}_y$$

在 $z=d$ 表面上，电流线密度 $\boldsymbol{K}_2$ 为

$$\boldsymbol{K}_2 = |\, \boldsymbol{H} \,|_{z=d} (-\boldsymbol{e}_y) = \frac{\pi E_0}{\mu_0 \omega d} \sin(\omega t - \beta x)\, \boldsymbol{e}_y$$

习 题 (4-2)

4-2-1 证明下述电磁场量满足电磁场基本方程组

$$\boldsymbol{E} = \cos(y - ct)\, \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{B} = c \cos(y - ct)\, \boldsymbol{e}_x$$

4-2-2 已知分界面一侧媒质 1 为空气，另一侧媒质 2 为干土，$\varepsilon_{r2}=3$，$\gamma_2=10^3$ S/m，现有 $E_1=100\sin(1\,000t+30°)$ V/m，其方向与分界面法线成 45°角，求 E_2。

4-2-3 设 $z=0$ 处为空气与理想导体的分界面，$z<0$ 一侧为理想导体，分界面处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(x,y,0,t)=H_0\sin\beta x\cos(\omega t-\beta y)\,\boldsymbol{e}_x$$

试求理想导体表面上的电流分布和分界面处的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的切线分量。

§4-3 动态位及其积分解

在讨论静电场、恒定电场与恒定磁场时，为了计算与分析的方便，曾经分别引入过标量电位 φ 和磁矢位 $\boldsymbol{A}$。类似地，在时变电磁场中，也可以引入称作动态位的辅助量，而使求解麦克斯韦方程组的问题简化。本节介绍动态位及其满足的达朗贝尔方程解答的性质。

4.3.1 动态位

在时变电磁场中，空间各点的场量应满足电磁场基本方程组。根据方程(4-22)式，可以引入一个矢量函数 $\boldsymbol{A}$，使

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4-34}$$

将上式代入方程(4-21)式，可得

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

上述结果表明，存在一个标量函数 φ，它满足

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

或

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \tag{4-35}$$

这样，便把电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 用矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 和标量函数 φ 表达出来了，称 $\boldsymbol{A}$ 为矢量位函数，φ 为标量位函数。由于 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 不仅都是空间坐标的函数，同时又都随时间变化，所以也称作动态位函数，简称动态位。

4.3.2 达朗贝尔方程

为了确定动态位 $\boldsymbol{A}$、φ 与激励源之间的关系，利用 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，且假设 μ 和 ε 均是常数，把(4-34)式和(4-35)式分别代入方程(4-20)式和方程(4-23)式，得到

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

和

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

这是一组相当复杂的联立的二阶偏微分方程组。直观上看，要通过这组方程解出 $\boldsymbol{A}$ 和 φ，最好是能够把 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 分开，找出它们各自单独满足的微分方程。

在上面的推导过程中，只规定了 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，尚未规定 $\boldsymbol{A}$ 的散度。因而确定 $\boldsymbol{A}$ 的条件尚不完备。为了单值地确定动态位，有必要规定 $\boldsymbol{A}$ 的散度。最常用的选择是让 $\boldsymbol{A}$、φ 满足附加条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{4-36}$$

因此，上述联立的偏微分方程组就化成为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{4-37}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4-38}$$

这是两个非齐次的波动方程，通常称为动态位的达朗贝尔方程。(4-36)式称为洛仑兹条件。

在洛仑兹条件下，动态位 $\boldsymbol{A}$ 单独地由电流密度 $\boldsymbol{J}$ 决定；动态位 φ 单独地由电荷密度 ρ 决定。由此不难理解(4-35)式的物理意义，它又一次表明时变电磁场中的电场强度不仅由电荷产生，同时也由变化的磁场产生。

例 4-5 在时变电磁场中，已知矢量位函数

$$\boldsymbol{A} = A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z)\, \boldsymbol{e}_x$$

其中 A_{m}、α 和 β 均为常数。求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解：由(4-34)式，可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\ &= -A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\alpha z}[\alpha \sin(\omega t - \beta z) + \beta \cos(\omega t - \beta z)]\boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

由(4-36)式

$$\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

得

$$\varphi = C(x, y, z)$$

在时变电磁场中，暂不考虑静电场的存在，所以，由(4-35)式，得到

$$\boldsymbol{E} = -A_{\mathrm{m}} \omega \mathrm{e}^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)\, \boldsymbol{e}_x$$

4.3.3 达朗贝尔方程的解

先讨论位于坐标原点的一个电荷量随时间变化的点电荷 $q(t)$ 激发的标量

位 φ。显然，除原点处外，标量位 φ 满足齐次波动方程

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{4-39}$$

考虑到 $q(t)$激发的场具有球对称性，所以 φ 与坐标 θ、ϕ 无关，仅是 r 和 t 的函数，即 $\varphi = \varphi(r, t)$。因此，方程(4-39)式在球坐标系下展开为

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} \tag{4-40}$$

式中 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$。这是$(r\varphi)$的一维波动方程，它的通解为

$$\varphi = \frac{f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} + \frac{f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}{r} \tag{4-41}$$

这里，f_1 和 f_2 是具有二阶连续偏导数的两个任意函数，其特解形式由点电荷的变化规律及周围介质的情况而定。

首先讨论(4-41)式等号右端第一项中因子 $f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$的物理意义。如果时间由 t 增加到 $t + \Delta t$，而空间坐标由 r 增加到 $r + v\Delta t$，则因子 f_1 的自变量保持不变，即有 $f_1\left(t + \Delta t - \frac{r + v\Delta t}{v}\right) = f_1\left(t + \Delta t - \frac{r}{v} - \Delta t\right) = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$。换句话说，如果在时刻 t，距离原点为 r 处 f_1 为某个值，则经过时间 Δt 后，f_1 的这个数值出现在比 r 远一个距离 $v\Delta t$ 处，如图 4-3 所示。这意味着，$f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$是从原点出发，以速度 v 向 $+r$ 方向行进的波。这就是电磁波，称之为入射波。同理，第二项 $f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)$表示向$(-r)$方向行进的电磁波(也就是向原点行进的电磁波)，称之为反射波。只有当电磁波在行进途中遇到障碍时，才会出现反射波。由于现在考虑的是无限大均匀媒质问题，这时应当只有从原点向 $+r$ 方向行进的波，而不会有向$(-r)$方向行进的波，即可以取 $f_2 = 0$。但必须选择函数 f_1 使之对应于激励源(点电荷 q)的效应。

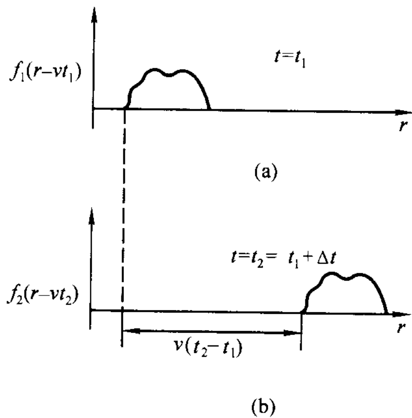


图 4-3　$f_1\left(t - \frac{r}{v}\right)$的物理意义

当点电荷不随时间变化时，

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

由此可推得，在原点处的时变点电荷 $q(t)$的动态标量位 φ 为

$$\varphi = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\varepsilon r} \tag{4-42}$$

这一公式也能用于点电荷不位于原点的情况，只需把 r 视为场点到点电荷的距离R 即可。

对于体积 V'中的任意体积电荷分布$\rho(\boldsymbol{r}')$，如图 4-4 所示，其在空间所建立的标量位 φ 可由叠加原理求得为

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}V' \tag{4-43}$$

式中，$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$是场点 r 到元电荷$\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$的距离。

同理，可求得体积 V'中的任意体积电流分布$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$所建立的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}V' \tag{4-44}$$

(4-43)式和(4-44)式两式称为达朗贝尔方程的解，也称为动态位的积分形式解。它们都表明，空间某点在时刻 t 的标量位或矢量位必须根据$\left(t-\frac{R}{v}\right)$时刻的场源分布函数进行求积。换句话说，在时刻 t，场中某点 r 处的动态位以及场量，并不是决定于该时刻激励源的情况，而是决定于在此之前的某一时刻，即$\left(t-\frac{R}{v}\right)$时刻激励源的情况。这说明，激励源在时刻 t 的作用，要经过一个推迟的时间$\frac{R}{v}$才能到达离它R 远处的场点，这一推迟的时间也就是传递电磁作用所需的时间。空间各点的动态位 $\boldsymbol{A}$ 和φ 随时间的变化总是落后于激励源的变化，所以通常又称 A、φ 为推迟位。推迟效应说明了电磁作用的传递是以有限速度 v 由近及远地向外进行的，这个速度称为电磁波的波速，它由媒质的特性决定

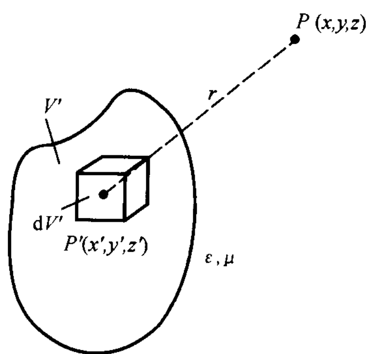


图 4-4 体积电荷分布

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4-45}$$

在真空中，电磁波的波速 $v=c=3\times10^{8}$ m/s，与光速相同。

习 题 (4-3)

4-3-1 在时变电磁场中，已知矢量位函数

$$\boldsymbol{A} = A_{\mathrm{m}}\sin(\omega t - \beta z)\,\boldsymbol{e}_x$$

其中 A_{m} 和 β 均是常数。试求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$。

4-3-2 试用直接代入法证明，以$(t-R\sqrt{\mu\epsilon})$或$(t+R\sqrt{\mu\epsilon})$为变量的具有二阶连续偏导数的任意函数 u，均是齐次波动方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial R^2}-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$ 的解。

§4-4 电磁功率流和坡印亭矢量

与静电场和恒定磁场一样，时变电磁场也具有能量，但更重要的是特有的能量流动现象。当随时间变化的电磁场以恒定的速度传播时，必将伴随着能量的传播，形成电磁能流。因此，在随时间变化的电磁场的任一给定区域中，电磁场的能量不再是恒量。但是，在自然界中，能量是守恒的。作为物质的一种特殊形态——电磁场，它当然也不例外地遵循自然界一切物质运动过程的普遍法则——能量守恒和转化定律。这一节将根据麦克斯韦方程组，构成电磁场的能量守恒和转化定律——坡印亭定理，并引入一个描述电磁能量流动的物理量——坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$。

在时变电磁场中，麦克斯韦认为能量也是定域于场中的，并作了电磁场能量的体密度就等于电场能量的体密度与磁场能量的体密度之和的基本假设，即

$$w = w'_{\mathrm{e}} + w'_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4-46}$$

任一体积 V 中的电磁场能量为

$$W = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V \tag{4-47}$$

由于电磁场的变化，V 内的能量将随时间变化。它的变化率为

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V \\ &= \int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right)\right]\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{4-48}$$

一般情况下，对于各向同性的线性媒质，有下列关系

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right) = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad 和 \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right) = \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

再利用麦克斯韦第一、二方程(4-20)式和(4-21)式，进一步有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\right) = \boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \quad 和 \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\right) = -\boldsymbol{H}\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}$$

将这两个关系式代入(4-48)式，得到

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V (\boldsymbol{E} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}) \mathrm{d}V$$

或者

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \mathrm{d}V + \int_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \mathrm{d}V \tag{4-49}$$

再应用高斯散度定理，上式可改写成

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V + \oint_A (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{4-50}$$

式中 A[①]为限定体积 V 的闭合面。

如果考虑到体积 V 内含有电源，那末 $\boldsymbol{J} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_e)$。将 $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{J}}{\gamma} - \boldsymbol{E}_e$ 代入(4-50)式，则有

$$\oint_A (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial W}{\partial t} - \int_V \frac{J^2}{\gamma} \mathrm{d}V + \int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_e \mathrm{d}V \tag{4-51}$$

这就是电磁场中的能量守恒和转化定律，一般称作电磁能流定理或坡印亭定理。上式中等号右边第一项 $\frac{\partial W}{\partial t}$ 为体积 V 内增加的电磁场能量；第二项积分 $\left(\int_V \frac{J^2}{\gamma} \mathrm{d}V\right)$ 表示电磁场在 V 内的导体中激起电流所产生的焦耳热损耗能量；第三项积分 $\left(\int_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_e \mathrm{d}V\right)$ 为 V 内电源提供的能量。而左边一项的闭合面积分是通过包围体积 V 的闭合面 A 向外输送的电磁能量。换句话说，单位时间内通过 A 面从体积 V 中流出的电磁能量为

$$\oint_A (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint_A \boldsymbol{S} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{4-52}$$

式中 $\boldsymbol{S}$ 称为坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{4-53}$$

$\boldsymbol{S}$ 的单位是 $\mathrm{W/m^2}$。它表示在单位时间内通过垂直于能量传播方向的单位面积的电磁能量，其方向就是电磁能量传播或流动的方向。所以，$\boldsymbol{S}$ 也称为电磁能流密度。

对于恒定电磁场，如果体积 V 中充满导电媒质，且不存在局外场强 $\boldsymbol{E}_e$（即没有电源），那末在坡印亭定理表达式(4-51)式中令电磁场能量对时间的偏导数为零，便可得到恒定场中的功率平衡方程为

---

① 本节为避免与坡印亭矢量混淆，面积改为 A 表示，后面章节遇到坡印亭矢量与面积同时出现的情况，亦采用这种表示法。

$$-\oint_A (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \frac{J^2}{\gamma}\mathrm{d}V \tag{4-54}$$

上式说明，导电媒质中的焦耳损耗能量是通过其表面 A 由外部输入的电磁能流供给的。

例 4-6　用坡印亭矢量分析直流电源沿同轴电缆向负载传送能量的过程。设电缆本身导体的电阻可以忽略。

解：考虑到同轴电缆本身导体的电阻可以忽略，其内外导体表面无电场的切向分量，只有电场的径向分量。已知内外导体间的电压为 U，流过的电流为 I，如图 4-5 所示，容易求出在内外导体之间的电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E} = \frac{U}{\rho \ln b/a}\boldsymbol{e}_\rho \tag{4-55}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi \tag{4-56}$$

式中 a、b 分别为内、外导体的半径。

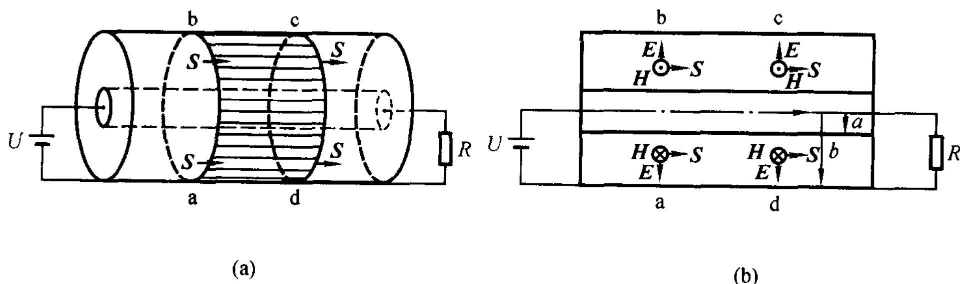


图 4-5　同轴电缆中的电磁能流

内外导体间任意截面上的坡印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln b/a}\boldsymbol{e}_z \tag{4-57}$$

上式说明，电磁能量在内外导体间的空间内沿 z 轴方向流动，由电源向负载。而在电缆外部空间和内外导体内部均没有电磁场，从而坡印亭矢量为零，无能量流动。

单位时间内通过同轴电缆内、外导体间的横截面 A 的总能量为

$$\begin{aligned} P &= \int_A \boldsymbol{S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} \\ &= \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln b/a} 2\pi\rho \mathrm{d}\rho \\ &= UI \end{aligned} \tag{4-58}$$

它正好等于电源的输出功率，这是在电路理论分析中熟知的结果。有趣的是，在求解过程中积分是在内外导体之间的截面上进行，并不包括导体内部。这说明所传输的电磁能量不是在导体内部进行的，而是由内外导体之间的空间电磁场构成的功率流传递。这样，从能量传递的角度看，电缆的条件似乎并不重要。但是，正因为导体上有电荷和电流分布，才使空间存在电场和磁场，通过场把能量送给负载。当然导体还起着引导能流走向的作用。

例 4-7 在例 4-6 题中，若导体的电阻不能忽略，分析能量的传输情况。

解： 当导体的电阻不能忽略时，在导体内部存在沿着电流方向的电场分量 $E_z = \dfrac{J}{\gamma}$。磁场的分布仍和上面例题相同。此时电场、磁场的分布状况如图 4-6 所示。

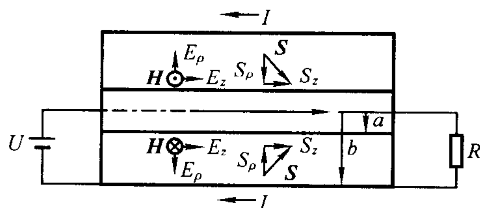


图 4-6 导体有电阻时同轴电缆中的电场、磁场和坡印亭矢量

从图中可以看出，在导体内部、电场只有 z 向分量，所以坡印亭矢量只有径向分量 S_ρ。也就是说，在导体内部没有沿 z 方向的能量传输，所以能量的传输仍在内外导体间的空间进行。

在内外导体之间，除了有径向的电场分量外，还存在 z 方向的电场分量，即

$$\boldsymbol{E} = E_\rho \boldsymbol{e}_\rho + E_\phi \boldsymbol{e}_\phi$$

坡印亭矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= (E_\rho \boldsymbol{e}_\rho + E_z \boldsymbol{e}_z) \times \boldsymbol{H} \\ &= (E_\rho H_\phi)\, \boldsymbol{e}_z - (E_z H_\phi)\, \boldsymbol{e}_\rho \end{aligned} \tag{4-59}$$

上式表明，坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 除了有上述的沿 z 轴方向传输的分量 S_z 外，还有一个逆径向的分量 S_ρ，即指向导体内部。这部分能流进入导体后，变成导体发出的焦耳热。能流密度的分布如图 4-6 所示。这表示导体中消耗在电阻上的焦耳热的能量也是通过坡印亭矢量传送的。

现在截取单位长度的内导体，把它的表面作为闭合面 A。由坡印亭定理

可知，由 A 面进入的坡印亭矢量的通量应等于这段导体电阻上的焦耳损耗功率 P。因为在 A 面上(在两端面处,因 S_ρ 与端面的法线垂直,所以不予考虑)

$$E_z = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{\pi a^2 \gamma} = IR, \qquad H_\phi = \frac{I}{2\pi a}$$

和

$$S_\rho = -E_z H_\phi = \frac{-I^2 R}{2\pi a}$$

故流进单位长度内导体的功率为

$$P = \int_0^1 \frac{I^2 R}{2\pi a} 2\pi a dz = I^2 R \qquad (4-60)$$

式中 $R = \frac{1}{\pi a^2 \gamma}$ 为该单位长度导体的电阻。$I^2 R$ 这个结果正是从电路理论中得到的该段导体内的消耗功率。

此例再一次说明，电磁能量的储存者和传递者都是电磁场，导体仅起着定向导引电磁能流的作用，故通常称为导波系统。对有损耗的传输线，能量仍在导体之间的空间传输。只是在传输过程中有部分能量为导体所吸收，变为导体电阻上的焦耳热损耗罢了。如果仅凭直觉，往往会认为能量是通过电流在导体中传输的。但理论分析说明，实际情况不是这样，电磁能量是在空间介质中传输的。两个天线之间通过广阔的空间收发电磁波的过程就是最常见的例子。

习　题　(4－4)

4－4－1　已知一电磁波的电场和磁场的分量表达式为

$$\boldsymbol{E} = 1000\cos(\omega t - \beta z)\, \boldsymbol{e}_x \text{ V/m}$$

$$\boldsymbol{H} = 2.65\cos(\omega t - \beta z)\, \boldsymbol{e}_y \text{ A/m}$$

试写出坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$。

4－4－2　圆柱形导线长为 l，电阻为 R，载有电流 I。求证：电磁场通过表面输入导线的功率 $-\oint_A (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot d\boldsymbol{A}$ 等于焦耳热功率 $I^2 R$。

§4－5　正弦电磁场

在时变电磁场中，场量和场源除了是空间坐标的函数，还是时间的函数。电磁场随时间作正弦变化是最常见也是最重要的形式。这种以一定频率作正弦变化的电磁场，称为正弦电磁场。在一般情形下，即使是非正弦变化的时变电磁场，也可以采用傅里叶分析方法将其分解成各次谐波分量来研究。因此，研究正弦变化的时变电磁场具有非常重要的意义。

4.5.1　正弦电磁场的复数表示法

分析正弦时变电磁场的有效工具就是交流电路分析中所采用的复数方法。在直角坐标系中，随时间作正弦变化的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的一般形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=&E_{xm}(x,y,z)\cos(\omega t+\phi_x)\boldsymbol{e}_x+\\&E_{ym}(x,y,z)\cos(\omega t+\phi_y)\boldsymbol{e}_y+\\&E_{zm}(x,y,z)\cos(\omega t+\phi_z)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{4-61}$$

式中 ω 是角频率。ϕ_x、ϕ_y 和 ϕ_z 分别为各坐标分量的初相角，它们仅是空间位置的函数。上式也可以表示成

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}(x,y,z)\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\tag{4-62}$$

其中

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{E}}(x,y,z)&=\dot{E}_x\boldsymbol{e}_x+\dot{E}_y\boldsymbol{e}_y+\dot{E}_z\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}E_{xm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_x}\boldsymbol{e}_x+\frac{1}{\sqrt{2}}E_{ym}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_y}\boldsymbol{e}_y+\frac{1}{\sqrt{2}}E_{zm}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_z}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}\tag{4-63}$$

把 $\dot{\boldsymbol{E}}(x,y,z)$称为电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的复数形式。(4-62)式是瞬时形式与复数形式间的关系式。

复数法使对时间的求导运算化为乘积运算，因为由(4-62)式，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}(x,y,z,t)}{\partial t}=\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{E}}(x,y,z)\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

此式表明，对时间的一次求导，相应的复数形式应乘以一个因子 $\mathrm{j}\omega$。

应用上述运算规律经过运算后，可得电磁场基本方程组的复数形式为

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\dot{\boldsymbol{J}}+\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}\tag{4-64}$$

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}\tag{4-65}$$

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{B}}=0\tag{4-66}$$

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{E}}=\dot{\boldsymbol{\rho}}\tag{4-67}$$

同理，得到电磁场的构成关系的复数形式为

$$\dot{\boldsymbol{D}}=\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}\qquad\dot{\boldsymbol{B}}=\mu\dot{\boldsymbol{H}}\qquad 和\qquad\dot{\boldsymbol{J}}=\gamma\dot{\boldsymbol{E}}\tag{4-68}$$

4.5.2　坡印亭定理的复数形式

对于正弦时变电磁场，当 x、y、z 方向的初相角均相同时，坡印亭矢量的瞬时值为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(t)&=\boldsymbol{E}_\mathrm{m}\cos(\omega t+\phi_E)\times\boldsymbol{H}_\mathrm{m}\cos(\omega t+\phi_H)\\&=\sqrt{2}\boldsymbol{E}\cos(\omega t+\phi_E)\times\sqrt{2}\boldsymbol{H}\cos(\omega t+\phi_H)\end{aligned}\tag{4-69}$$

它在一个周期 T 内的平均值为

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{S}(t)\mathrm{d}t = (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cos(\phi_E - \phi_H) \qquad (4-70)$$

$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$的数值表示在一个周期内沿$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$方向通过单位面积的平均功率。$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$也可表示成

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*] \qquad (4-71)$$

把$(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)$称为坡印亭矢量的复数形式，简称复坡印亭矢量，记作$\tilde{\boldsymbol{S}}$

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^* \qquad (4-72)$$

它的实部就是坡印亭矢量的平均值(或有功功率密度)，表示能量的流动，而虚部是无功功率密度，表示着电磁能量的交换。

对复坡印亭矢量取散度并展开

$$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*) = \dot{\boldsymbol{H}}^*\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}) - \dot{\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)$$

将方程(4－65)式和(4－64)式代入上式，并利用 $\dot{\boldsymbol{B}}=\mu\dot{\boldsymbol{H}}$和 $\dot{\boldsymbol{D}}=\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}$关系式，可得

$$\nabla\cdot(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*) = -\mathrm{j}\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}}\cdot\dot{\boldsymbol{H}}^* - \dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}^* + \mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^* \qquad (4-73)$$

将 $\dot{\boldsymbol{E}}=\dfrac{\dot{\boldsymbol{J}}}{\gamma}-\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}$ 关系式代入上式，对等式两边进行体积分，并利用高斯散度定理，有

$$-\oint_A(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V\frac{|\dot{\boldsymbol{J}}|^2}{\gamma}\mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega\int_V(\mu|\dot{\boldsymbol{H}}|^2 - \varepsilon|\dot{\boldsymbol{E}}|^2)\mathrm{d}V - \int_V\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{e}}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}^*\mathrm{d}V \qquad (4-74)$$

这就是坡印亭定理的复数形式。上式左边表示流入闭合面 A 内的复功率；右边第一项表示体积 V 内导电媒质消耗的功率，即有功功率 P；右边第二项表示体积 V 内电磁能量的平均值，即无功功率 Q。右边最后一项是体积 V 内电源提供的复功率。若体积 V 内不包含有电源，(4－74)式化成

$$-\oint_A(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = P + \mathrm{j}Q \qquad (4-75)$$

根据等值的观点，可令 $P=I^2R$ 和 $Q=I^2X$，因而时变场中某一体积 V 内媒质的等效电路参数R 和X，可分别由下列两式计算

$$R = -\frac{1}{I^2}\mathrm{Re}\left[\oint_A(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right] \qquad (4-76)$$

$$X = -\frac{1}{I^2}I_{\mathrm{m}}\left[\oint_A(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right] \qquad (4-77)$$

在第五章导体的交流内阻抗一节中将介绍这两个公式的应用。

例 4-8 在无源($\rho=0, \boldsymbol{J}=0$)的自由空间中，已知电磁场的电场强度复矢量

$$\dot{\boldsymbol{E}}(z) = E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_y$$

式中 β、E 为常数。求：(1)磁场强度复矢量 $\dot{\boldsymbol{H}}(z)$；(2)坡印亭矢量的瞬时值；(3)平均坡印亭矢量。

解：(1)由 $\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\dot{\boldsymbol{H}}$，得

$$\dot{\boldsymbol{H}}(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}(E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z})\,\boldsymbol{e}_x$$

$$= -\frac{\beta E}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_x$$

(2) 电场、磁场的瞬时值为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t-\beta z)\,\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{H}(z,t) = -\sqrt{2}\,\frac{\beta E}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-\beta z)\,\boldsymbol{e}_x$$

所以，坡印亭矢量的瞬时值为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{2\beta E^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-\beta z)\,\boldsymbol{e}_z$$

(3) 由(4-71)式，得

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \mathrm{Re}\left[E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_y\times\left(-\frac{\beta E}{\omega\mu_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\boldsymbol{e}_x\right)^*\right]$$

$$= \frac{\beta E^2}{\omega\mu_0}\boldsymbol{e}_z$$

4.5.3 达朗贝尔方程的复数形式及其解

对于正弦电磁场，达朗贝尔方程的复数形式为

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{A}} + \beta^2\dot{\boldsymbol{A}} = -\mu\dot{\boldsymbol{J}} \tag{4-78}$$

$$\nabla^2\dot{\varphi} + \beta^2\dot{\varphi} = -\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \tag{4-79}$$

式中，$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，称为相位常数，单位是 rad/m [弧度/米]。这两个方程的解可由§4-3中得到的瞬时解对应的复数形式来表示。在时间上推迟 $\frac{R}{v}$，相当于相位推迟 $\omega\frac{R}{v}=\beta R$，故借助于(4-43)式和(4-44)式，可得动态标量位

和矢量位的解的复数形式分别为

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V}\frac{\dot{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}V' \tag{4-80}$$

$$\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V}\frac{\dot{\boldsymbol{J}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}V' \tag{4-81}$$

在正弦电磁场中，电场 $\dot{\boldsymbol{E}}$、磁场 $\dot{\boldsymbol{B}}$与动态位 $\dot{\boldsymbol{A}}$、$\dot{\varphi}$的关系也可用复矢量表示成

$$\dot{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\dot{\boldsymbol{A}} \tag{4-82}$$

和

$$\dot{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{A}}-\nabla\dot{\varphi}=-\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{A}}+\frac{\nabla(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{A}})}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon} \tag{4-83}$$

这里已经利用了洛仑兹条件的复数形式。由上两式看出，只要求得 $\dot{\boldsymbol{A}}$，即可计算出电场和磁场。

在§4－3中已经指出，场点上动态位与引起它的激励源在时间上的差异，也就是电磁波从激励源传播到该场点所需的时间。如果激励源变化得很快，则这种推迟现象就比较明显；如果变化不快，则在电磁波从激励源传播到场点这段时间内，激励源并未发生明显的变化，此时虽仍有推迟作用，但对场量的影响不太大。对于正弦电磁场来说，显然，当 $\beta R\ll1$ 时，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}\approx1$，可以不计推迟作用。这样，动态位的解(4－80)式和(4－81)式分别与静电场和恒定磁场中的电位和磁矢位的表达式相似。这说明对每一瞬间来说，φ 和 $\boldsymbol{A}$ 在空间的分布规律分别和静电场和恒定磁场的分布规律相同。场点的“响应”和源点的“激励”同相。又可把条件

$$\beta R\ll1 \tag{4-84}$$

写成

$$r\ll\lambda \tag{4-85}$$

称为似稳条件。这里 λ 是正弦电磁波在一个周期内行进的距离，即波长 $\lambda=vT$。时变电磁场中，满足似稳条件的区域称为似稳区，似稳区内的时变场称为似稳电磁场。有关似稳电磁场的详细分析和讨论在第五章中展开。但应注意，似稳区是一个相对的概念。

习　题　(4－5)

4－5－1　改写下列电场或磁场的表示式：

(1) 将瞬时形式改写成复数形式

$$\boldsymbol{E} = E_{\mathrm{m}}\cos 2x\sin \omega t\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{H} = H_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{E} = E_{\mathrm{m}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - \beta z)\boldsymbol{e}_x + E_{\mathrm{m}}\cos\frac{\pi x}{a}\sin(\omega t - \beta z)\boldsymbol{e}_y$$

(2) 将复数形式改写成瞬时形式

$$\dot{\boldsymbol{E}} = E\sin\frac{\pi y}{a}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)z}\boldsymbol{e}_x$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = H\mathrm{j}\cos\beta z\boldsymbol{e}_y$$

4-5-2 已知无限大均匀媒质中电场和磁场的瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E} = E_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi_x)\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{H} = H_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi_y)\boldsymbol{e}_y$$

式中 α、β 为常数。试求

(1) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的复数形式

(2) 坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 的平均值 $\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}$

4-5-3 在正弦电磁场中，若已知矢量位 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 是

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\psi}(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

试求相应的电场强度 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和磁感应强度 $\dot{\boldsymbol{B}}$。

§4-6 电磁辐射

在前面几节中，我们已经看到空间电磁场并不取决于同一时刻的源的特性，即便在同一时刻源已消失，只要前一时刻源还存在，它们原来产生的空间电磁场仍然存在。这表明源已将电磁能量释放到空间，电磁能量脱离源而单独存在于空间中，这种现象称为电磁辐射。这就是说，当有随时间变化的电流、电荷时，就会产生电磁辐射。电磁辐射的过程就形成了电磁波，并以一定的速度在空间传播。

天线就是一种专门的辐射器。单元偶极子天线是一种最简单的天线，本节将专门分析它的辐射特性。最后简单介绍细线天线和天线阵。在某些实际系统中，正是应用天线或天线阵将电磁能有效地、有目的地向外输送，如广播、电视、雷达及无线电通讯等。但在某些情况下，辐射会造成某些不必要的能量损耗且导致对其它系统的电磁干扰(如当电车通过时,由于电车导电回路中接触处的火花所引起的辐射,导致电视机屏幕上干扰信号的出现)，也有可能破坏本系统的正常工作。这些现象人们都希望尽量避免。因此，了解和掌握电磁辐射的特性是十分重要的。

4.6.1　单元偶极子的辐射

为了简单起见，这里先研究单元偶极子天线的辐射。实际的线形天线可以看成由许多单元偶极子天线串联而成，整个天线所辐射的电磁场就是所有单元偶极子天线所辐射的电磁场的叠加。

单元偶极子天线是指一段载流细导线，如图 4－7 所示。它的长度 Δl 和横截面尺寸都比电磁波的波长 λ 以及观察点距离小得多。因此，在单元偶极子上，可以忽略推迟效应，认为它上面的电流是均匀且同相的；另外任一观察点到细导线段上各点的距离近似相同。

设细线电流段位于无限大的自由空间内，若单元偶极子中的电流为

$$i(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$$

则对应的复数形式是

$$\dot{I} = I e^{j\phi}$$

由(4－81)式知，线电流段 $\dot{I}\Delta l$ 产生的矢量位 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 是

$$\dot{\boldsymbol{A}}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\Delta l}\frac{\dot{I}\,e^{-j\beta R}}{R}\,d\boldsymbol{l}' \qquad (4-86)$$

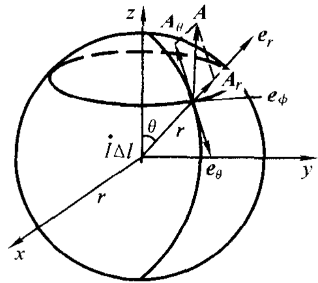


图 4－7　单元偶极子天线

由于 $\Delta l \ll \lambda$，$\Delta l \ll r$，所以可以认为上式中 $R \approx r$；又因电流仅有 z 方向分量，即 $d\boldsymbol{l}' = dz\boldsymbol{e}_z$，故

$$\dot{\boldsymbol{A}}(r) = \frac{\mu_0 \dot{I}\,\Delta l}{4\pi r}e^{-j\beta r}\boldsymbol{e}_z \qquad (4-87)$$

把(4－87)式代入(4－82)式和(4－83)式，就能得到单元偶极子天线的电磁场。在球坐标系中，其结果是

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_\phi &= \frac{\dot{I}\Delta l}{4\pi r^2}e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r}\left(1 + j\frac{2\pi r}{\lambda}\right)\sin\theta \\
\dot{H}_\theta &= \dot{H}_r = 0 \\
\dot{E}_r &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\dot{I}\Delta l}{2\pi r^2}e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}\left(1 - j\frac{\lambda}{2\pi r}\right)\cos\theta \\
\dot{E}_\theta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\dot{I}\Delta l}{4\pi r^2}e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}\left(1 + j\frac{2\pi r}{\lambda} - j\frac{\lambda}{2\pi r}\right)\sin\theta \\
\dot{E}_\phi &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4-88)$$

式中 $\lambda=\frac{2\pi}{\beta}$，称为电磁波的波长。

从(4-88)式可知，单元偶极子天线的辐射电磁场是很复杂的。由于它们均含有(r/λ)不同幂项的因子，随(r/λ)的变化，某些项将起主要作用，而另一些项则起次要作用。为了突出它的主要性质，把它分为近区场和远区场两种情况分别讨论。

近区场

在(4-88)式中，当 $r\ll\lambda$ 时，含有(r/λ)的高次幂项相对地可以忽略，且 $e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}\approx 1$。称满足条件 $r\ll\lambda$ 的区域为近区场(简称近区)。这时有

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_\theta &= \dot{H}_r = \dot{E}_\phi = 0\\ \dot{H}_\phi &= \frac{\dot{I}\Delta l\sin\theta}{4\pi r^2}\\ \dot{E}_r &= \frac{2\dot{p}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\\ \dot{E}_\theta &= \frac{\dot{p}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\end{aligned}\right\}\qquad(4-89)$$

式中
$$\dot{p}=\frac{\dot{I}\Delta l}{j\omega}$$

(4-89)式表明，在近区场其磁场与由毕奥-沙伐定律求出的 $\dot{I}\Delta l$ 的磁场相同，电场与由库仑定律求出的电偶极子 $\dot{p}$的电场相同，而且场与源的相位完全相同。这些特点说明，虽然源随时间变化，但当场点与源点间的距离远小于波长时，推迟效应可以忽略，时变电磁场与恒定电磁场的特性完全相同。

从能量关系看，电场滞后于磁场 90°相位角，故复坡印亭矢量的实部为零，只有虚部。这表明，在近区内，只有电能与磁能的交换和振荡，似乎不能通过近区向外辐射电磁能量。当然这一结论是近似的，这是由于忽略$\frac{r}{\lambda}$的高次项后所致的结果。实际上，单元偶极子天线向远处辐射电磁能量正是依赖于这些高次项。

远区场

在(4-88)式中，当 $r\gg\lambda$ 时，含有$\frac{r}{\lambda}$的低次幂项可以忽略，即把$\frac{r}{\lambda}$的零次项，负一次项略去，只保留一次。称满足条件 $r\gg\lambda$ 的区域为远区场(简称远区)。这时有

$$\left.\begin{aligned}\dot{H}_\theta &= \dot{H}_r = \dot{E}_r = \dot{E}_\phi = 0\\ \dot{H}_\phi &= \mathrm{j}\,\frac{\dot{I}\Delta l\sin\theta}{2\lambda r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi r}{\lambda}}\\ \dot{E}_\theta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mathrm{j}\,\frac{\dot{I}\Delta l\sin\theta}{2\lambda r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi r}{\lambda}}\end{aligned}\right\}\tag{4-90}$$

这就是单元偶极子天线在远区场的数学表达式，下面来分析它们所包含的物理内容。

(1) 场量的相位随 r 的增大不断落后，即推迟效应不能忽略，无论电场和磁场均具有波的性质。相位相同的面称为等相面。在距单元偶极子天线为 r 的球面上有相同的相位，即等相面为球面，故单元偶极子天线在远区产生的电磁波是球面波。

(2) 在空间上，电场、磁场和波传播方向三者相互垂直，且

$$Z_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\tag{4-91}$$

人们常把 $\dot{E}_\theta$ 与 $\dot{H}_\phi$ 的比值定义为由它们组成的电磁波的波阻抗，记为 Z_0。对在自由空间传播的电磁波来说，Z_0 近似等于 377Ω。

(3) 在时间上，电场与磁场同相位，故复坡印亭矢量只有实部。由 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 知，$\boldsymbol{S}$ 沿 r 方向，说明远区中只有不断向外辐射的能量。故远区又称为辐射区，其中的电磁场又称作辐射场。

穿过半径为 r 球面 A 向外辐射的总电磁功率为

$$\begin{aligned}P &= \oint_A \mathrm{Re}[\tilde{\boldsymbol{S}}]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\\ &= I^2\left[80\pi^2\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2\right]\end{aligned}\tag{4-92}$$

此式说明，P 与球面半径 r 的大小无关，即穿过以波源为中心的任一球面向外辐射的电磁功率是相同的。这表明能量没有在空间停留，而是不断地从波源处呈辐射状向外传播出去。

单元偶极子天线的辐射功率 P 不仅与电流 I 有关，还与 $(\Delta l/\lambda)$ 的大小有关，把(4-92)式与 $P=I^2R_\mathrm{e}$ 相对照，辐射功率可看作是电源向电阻 R_e 输出的功率，令

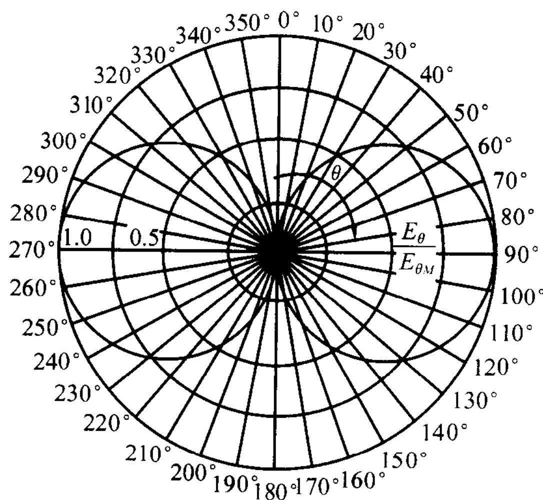
$$R_\mathrm{e} = 80\pi^2\left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2\tag{4-93}$$

称为单元偶极子天线的辐射电阻，它表征了天线辐射电磁能量的能力。R_e 愈大，天线的辐射能力愈强。

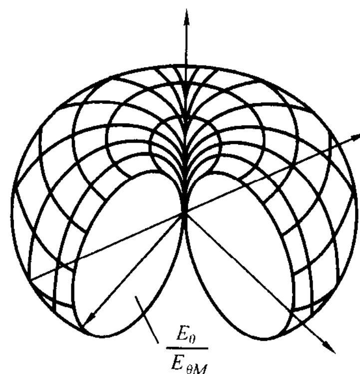
(4) 电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的振幅不仅与距离 r 有关，而且与观察点所处的方

位也有关，它们与 θ 的关系是 $\sin\theta$。也就是说，在不同方向上，场强和坡印亭矢量的大小均不相同，这叫做天线辐射的方向性。即单元偶极子天线辐射的电磁波具有一定的方向性。场强公式中与 θ、ϕ 有关的因子称为方向性因子，以 $f(\theta,\phi)$表示。对于单元偶极子天线，$f(\theta,\phi)=\sin\theta$。

图 4-8 表示单元偶极子天线在不同 θ 处场量所具有的相对量值，这种图形称为天线的方向图。从图看出，同一经线上各点的场强是不相同的。$\theta=\frac{\pi}{2}$ 处振幅最大；$\theta=0$ 或 π 时振幅为零，即与单元偶极子轴垂直的方向辐射最强，而沿轴线方向没有辐射。由于 E 和 H 的数值均与 ϕ 无关，表明同一纬线上各点场强的幅值相同。若以电力线和磁力线来描写场的分布，则电力线沿经线分布，而磁力线沿纬线分布。



(a) 电偶极子辐射场E面方向图



(b) 电偶极子辐射场立体方向图

图 4-8 单元偶极子天线的方向图

根据以上分析的单元偶极子天线的近区和远区中电场和磁场的分布，便可描绘如图 4-9 所示的电力线和磁力线在某一瞬间的分布。从图(a)中可以看出，在近区内，电力线从偶极子的电荷出发，又终止在偶极子的电荷上，这就是库仑场；在远区内，由于电磁感应与位移电流的作用，电力线脱离了电荷而形成闭合曲线。不管在近区还是在远区，磁力线的分布都具有轴对称性，所以在垂直于单元偶极子天线的平面内，磁力线围绕着天线轴旋转成闭合曲线，它们和传导电流及位移电流互相交链且符合右手螺旋关系。每隔半个波长，磁力线的方向变动一次，如图 4-9 (b)所示。

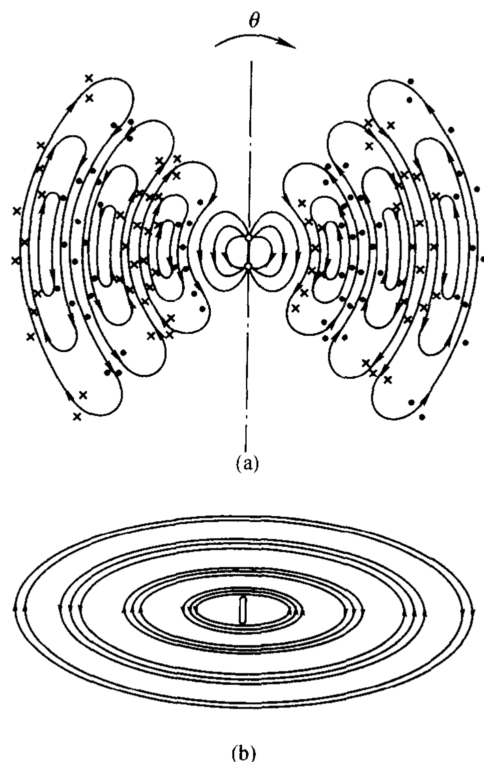


图 4－9　单元偶极子天线的电力线及磁力线分布

4.6.2　细线天线和天线阵

上面以单元偶极子为例说明了电磁辐射。但它的辐射能力是很差的。在工程实际中，随着频率与要求的不同，具有各种不同形式的天线。例如，为提高辐射能力，通常采用由截面半径远小于波长的金属导线构成的天线，称为细线天线。细线天线广泛用于通信、广播、雷达等领域。细线天线的内容非常丰富。这里只介绍有关细线天线的最基本的概念和性质，以及天线阵的概念。

细线天线

将一段终端开路的双线传输线的两根导线张开一定角度，若张角为 180°，两导线在直线上，就构成一种细线天线，称为直线对称振子。如图 4－10 所示。直线对称振子是应用非常广泛的一种基本天线，它既可以单独使用，也可以作为天线阵的组成单元，还可以作为某些微波天线的馈源。

与单元偶极子天线不同，直线对称振子的长度与波长可以相比，故它上面的电流不再是等幅同相位了。作为工程近似，设振子上的电流为正弦分布。

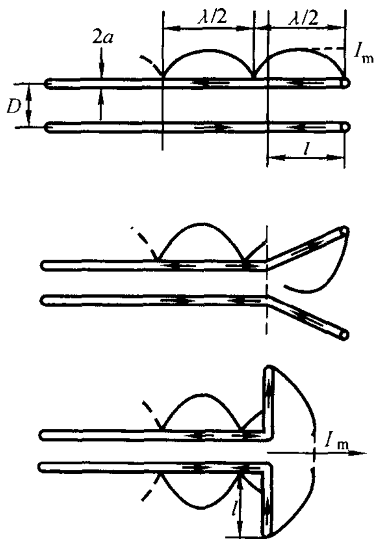


图 4-10 开路传输线张开成对称振子

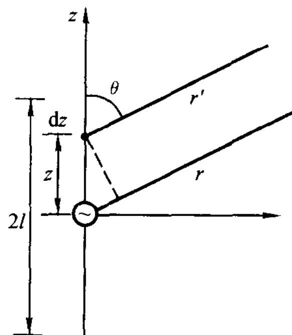


图 4-11 直线对称振子

如图 4-11 所示，设直线对称振子沿 z 轴放置，振子中心位于坐标原点，则振子上的电流分布表示式为

$$\dot{I}(z)=I\sin\beta(l-|z|) \tag{4-94}$$

式中 I 为波腹点电流有效值，β 为对称振子上电流传输的相位常数，在此它就等于自由空间的相位常数，即 $\beta=\frac{2\pi}{\lambda}$。

将对称振子分成许多小单元，每个小单元电流 $\dot{I}dz$ 就是一个单元偶极子天线，其辐射场可由(4-90)式给出

$$d\dot{E}_\theta=j\frac{\dot{I}\,dz\sin\theta}{2\lambda r'}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}e^{-j\beta r'} \tag{4-95}$$

由于 $r\gg l$，可取如下近似

$$r'=r-z\cos\theta$$

上式表示的 r' 与 r 的差别只需在相位因子 $e^{-j\beta r'}$ 中考虑，对于振幅，可取 $r'=r$，则(4-95)式可改写为

$$d\dot{E}_\theta=j\frac{\dot{I}\,dz\sin\theta}{2\lambda r}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}e^{-j\beta(r-z\cos\theta)} \tag{4-96}$$

把(4-94)式代入上式，得

$$d\dot{E}_\theta=j\frac{60\pi}{\lambda r}I\sin\beta(l-|z|)\sin\theta e^{-j\beta r}e^{j\beta z\cos\theta}dz$$

对称振子天线的辐射场即等于这许多单元电流产生的辐射场的叠加

$$\dot{E}_\theta = \int_{-l}^{l} \mathrm{d}\dot{E}_\theta$$

$$= \mathrm{j}\,\frac{60I}{r}\left[\frac{\cos(\beta l\cos\theta)-\cos\beta l}{\sin\theta}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r} \tag{4-97}$$

这就是对称振子天线辐射场的表达式。

由(4－97)式可见，对称振子天线的辐射场也是一个球面波，其等相位面是以振子中点为球心的球面。电场只有 E_θ 分量，在不同的 θ 方向上有不同的辐射场强值，即它也是有方向性的。但细线天线的方向性比单元偶极子天线要复杂得多。对称振子天线的方向性因子为

$$f(\theta,\phi) = \frac{\cos(\beta l\cos\theta)-\cos\beta l}{\sin\theta} \tag{4-98}$$

$f(\theta,\phi)$中不仅含有 θ，还含有天线半长度 l。这说明不同长度的细线天线有不同的方向性。图 4－12 画出了四种电长度时的 E 面方向图。由于辐射与 ϕ 无关，H 面的方向图总是圆，与振子的电长度无关。

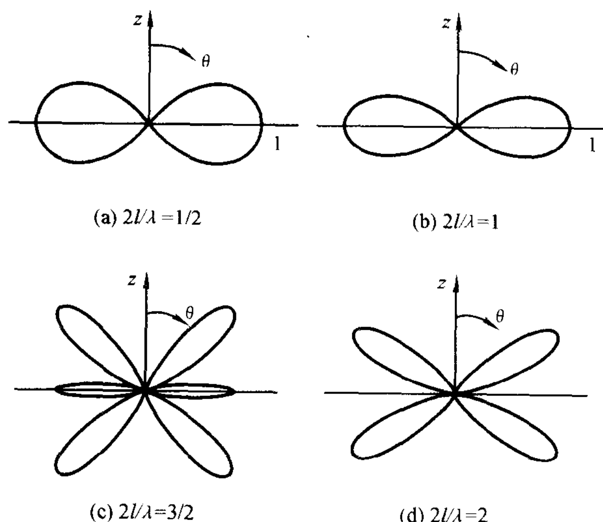


图 4－12　细线天线的 E 平面方向图

天线方向图中波瓣的数目等于天线全长相对半波长的倍数，天线愈长，波瓣愈多。主瓣(最大辐射的波瓣)的宽度愈小，方向性愈强，天线辐射能量愈集中。因此，一般发射天线都比较长。长度 $2l=\frac{\lambda}{2}$ 的对称半波振子天线有特别

重要的实用价值，广泛应用于短波和超短波波段。

天线阵

实际使用的天线，经常由多个相同的天线按一定规律排列组合在一起而构成，称为天线阵。这种组合可以获得某些期望的辐射特性。例如，期望得到更强的方向性、更高的增益或所需要的方向图。

组成天线阵的独立单元称为阵元或天线单元。若各天线单元排列在一直线上或一平面上，则称为直线阵或平面阵。另外，还有空间列阵天线。这里以直线阵中最基本的二元天线阵为例，说明天线阵方向性增强的原理。

二元天线阵由相隔一定距离的两个相同天线单元组成，它们在空间的取向一致，如图 4－13 所示。设振子 1 的激励电流为 I_1，振子 2 的激励电流为 $I_2=mI_1e^{j\alpha}$。式中的 m 是两振子激励电流的振幅比，α 为 I_2 与 I_1 的相位差。由于场点 P 很远，因而可近似认为射线 r_1 和 r_2 是平行的，振子 1 和 2 在场点 P 产生的电场矢量 $\dot{E}_1$ 和 $\dot{E}_2$ 近似为同方向的(都是沿 θ 方向的)，即

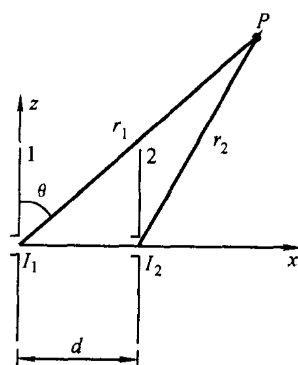


图 4－13 二元天线阵的辐射场

$$\dot{\boldsymbol{E}}_1 = \mathrm{j}\frac{60I_1}{r_1}f_1(\theta,\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r_1}\boldsymbol{e}_\theta \quad (4-99\mathrm{a})$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}_2 = \mathrm{j}\frac{60I_2}{r_2}f_2(\theta,\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r_2}\boldsymbol{e}_\theta \quad (4-99\mathrm{b})$$

天线阵的辐射场等于两个振子辐射场的矢量和，即

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}_1 + \dot{\boldsymbol{E}}_2$$

由于两振子等长且平行，因此有相同的方向性函数，即 $f_1(\theta,\phi)=f_2(\theta,\phi)$，是相似二元阵。另外，在(4－99)式中，$r_1$ 和 r_2 的差别对场的振幅的影响可以忽略不计；但对相位的影响则必须考虑，即 r_1 和 r_2 之间的行程差 $\Delta r=r_1-r_2\approx d\sin\theta\cos\phi$ 所引起的相位差 $\beta d\sin\theta\cos\phi$ 不能忽略，于是

$$\begin{aligned}\dot{E}_2 &= \mathrm{j}\frac{60I_2}{r_2}f_2(\theta,\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r_2}\\ &= \mathrm{j}\frac{60mI_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}}{r_1}f_1(\theta,\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(r_1-d\sin\theta\cos\phi)}\\ &= m\dot{E}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\end{aligned} \quad (4-100)$$

式中

$$\psi = \alpha + \beta d\sin\theta\cos\phi \quad (4-101)$$

表示场点 P 处 $\dot{E}_2$ 和 $\dot{E}_1$ 的相位差，它包含了由激励电流相位差及波程差引起

的相位差。

场点P处的总辐射场为

$$
\begin{aligned}
\dot{E} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{E}_1 (1 + m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}) \\
&= \mathrm{j}\,\frac{60 I_1}{r_1} f_1(\theta,\phi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r_1}(1 + m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi})
\end{aligned}
\tag{4-102}
$$

其模为

$$
|\dot{E}| = \frac{60 I_1}{r_1} f_1(\theta,\phi)\cdot f_{12}(\theta,\phi) \tag{4-103}
$$

由此得出二元天线阵的方向性函数为

$$
f(\theta,\phi) = f_1(\theta,\phi)\cdot f_{12}(\theta,\phi) \tag{4-104}
$$

式中

$$
f_{12}(\theta,\phi) = \sqrt{1 + m^2 + 2m\cos(\alpha + \beta d\sin\theta\cos\phi)} \tag{4-105}
$$

称为阵因子方向性函数。它仅与各单元天线在阵中的排列、激励电流的振幅和

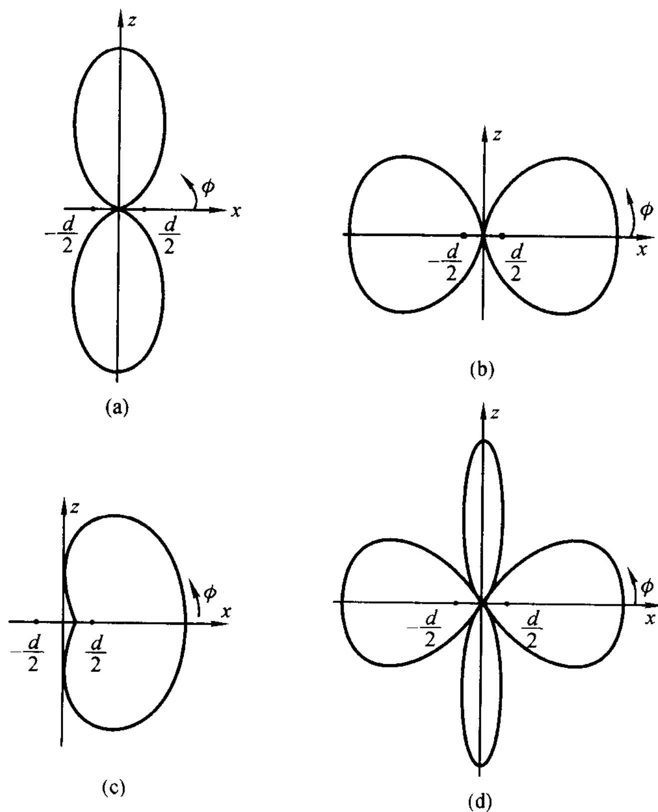


图 4－14　二元阵E平面方向图

相位有关。与单元天线本身的结构尺寸无关。$f_1(\theta,\phi)$是单元天线的方向性函数，称为单元因子，它取决于单元天线的结构尺寸和取向，与阵的排列方式无关。

从(4-104)式看出，二元天线阵的方向性函数等于单元因子 $f_1(\theta,\phi)$与阵因子 $f_2(\theta,\phi)$的乘积，这就是方向性相乘原理。这个原理不仅适合于二元阵，也适合于多元阵，但应注意它仅适合于由相似单元组成的阵。方向性相乘原理给分析天线阵的方向性带来很大方便。

图 4-14 示出了不同距离及不同电流相位差情况下的阵方向图。其中(a)表示 $d=\frac{\lambda}{2}$，$\alpha=0°$；(b)表示 $d=\frac{\lambda}{2}$，$\alpha=180°$；(c)表示 $d=\frac{\lambda}{4}$，$\alpha=90°$；(d)表示 $d=\lambda$，$\alpha=\theta°$的方向图。

习 题 (4-6)

4-6-1 在自由空间里有一单元偶极子天线，已知 $l=0.1$ m，$\lambda=10$ m，$I=1$ A，求 $r=1000$ m，$\theta=90°$时：

(1) 电场强度振幅值及磁场强度振幅值；

(2) 坡印亭矢量最大值；

(3) 该单元偶极子天线的总辐射功率；

(4) 该单元偶极子天线的辐射电阻。

4-6-2 试证：若仅考虑远区场，则当电流沿 z 轴流动时，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 可以简化为 $H_\phi=-\frac{1}{\mu}\sin\theta\frac{\partial A}{\partial r}$。

提 要

1. 静止媒质中时变电磁场基本方程(微分形式)组为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$$

构成关系为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$$

2. 时变电磁场在不同媒质分界面上的衔接条件

$$E_{1t}=E_{2t}\qquad H_{1t}-H_{2t}=K$$

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma\qquad B_{2n}=B_{1n}$$

3. 动态位与场量的关系为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad 和 \qquad \boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$$

当 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 满足洛仑兹条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 时，它们都满足达朗贝尔方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}$$

$$\nabla^2\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

达朗贝尔方程的积分解为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}\left(x',y',z',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\rho\left(x',y',z',t-\frac{R}{v}\right)}{R}\mathrm{d}V'$$

当激励源为时间的正弦函数时，则有

$$\dot{\boldsymbol{A}}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\dot{\boldsymbol{J}}(x',y',z')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\frac{\dot{\rho}(x',y',z')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta R}}{R}\mathrm{d}V'$$

可以看出，时间上推迟 $\frac{R}{v}$，相应于正弦函数的相位滞后 βR，所以动态位又称为推迟位或滞后位。

4. 电磁能流密度——坡印亭矢量

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times H$$

坡印亭定理反映了电磁场中的能量守恒及转换定律

$$\oint_A(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\int_V\boldsymbol{E}_e\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V-\int_V\frac{|\boldsymbol{J}|^2}{\gamma}\mathrm{d}V-\frac{\partial W}{\partial t}$$

5. 正弦电磁场中坡印亭矢量及坡印亭定理的复数形式分别为

$$\tilde{\boldsymbol{S}}=\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*$$

$$-\oint_A\tilde{\boldsymbol{S}}\cdot\mathrm{d}A=\mathrm{j}\omega\int_V(\mu|\dot{H}|^2-\varepsilon|\dot{E}|^2)\mathrm{d}V+\int_V\frac{|\dot{\boldsymbol{J}}|^2}{\gamma}\mathrm{d}V$$

导电媒质的等效电路参数——电阻 R 和电抗 X 分别为

$$R=\frac{1}{I^2}\mathrm{Re}\left[-\oint_A(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right]$$

$$X=\frac{1}{I^2}\mathrm{Im}\left[-\oint_A(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\right]$$

6. 在单元偶极子激发的电磁场中，$r\ll\lambda$ 的区域称为近区(或似稳区)，其

中电场与磁场的分布规律与相应的静电场和恒定磁场相似。$r \gg \lambda$ 的区域称为远区(或辐射区)。

在辐射区电磁波是球面波，有推迟效应。用波阻抗

$$Z_0 = \frac{\dot{E}_\theta}{\dot{H}_\phi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

来表示电场与磁场的比值。用辐射电阻

$$R_e = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2$$

来表示辐射的能力。辐射功率

$$P = \oint_A \boldsymbol{S}_{av} \cdot d\boldsymbol{A} = R_e I^2$$

7. 辐射是有方向性的，可用 E 平面、H 平面上的方向图来描绘辐射的方向性。方向图是根据方向性函数 $f(\theta, \phi)$绘制而成。

8. 细线天线可看成是许多个单元偶极子天线。可借助单元偶极子天线的分析方法分析细线天线的辐射特性。

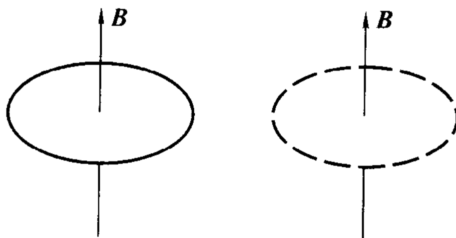
为了获得某些所期望的辐射特性，常将许多天线元按一定方式排列构成天线阵。二元天线阵的方向性函数是单个天线的方向性函数与阵因子的乘积。这就是方向性相乘原理。

思　考　题

4-1　何谓时变电磁场？在时变电磁场中，电流连续性原理应如何表示？此时应包括哪几种电流？各具有什么特点？

4-2　试按下述几方面比较传导电流与位移电流：(1)由什么变化引起的？(2)可以在哪类物质中存在？(3)两者是否都能引起热效应？规律是否相同？

4-3　在理想介质中，存在磁场 $B = B_m \sin \omega t$，试问在图示两种情况下，回路中是否存在感应电动势与感应电流？



(a) 导体回路　　(b) 假想回路

思考题 4-3 图

4-4 试述电磁感应定律的各种形式和它们各自的适用范围，并举例说明。

4-5 写出电磁场基本方程组的积分形式、微分形式，并阐述各方程的物理意义。

对静电场有 $\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$,对普遍的电磁场也有$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q$，二者在理解上有何不同?

对于恒定磁场有 $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$,对于普遍的电磁场也有$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$，二者在理解上有何不同?

4-6 若位移电流的磁场可忽略，则全电流定律就退化为恒定磁场的安培环路定律，这种看法对吗?

4-7 试回答关于麦克斯韦方程组的一些问题：

(1) 方程组中某一方程能否由其余的三个方程推导出来?

(2) 为什么说积分形式和微分形式等效?

(3) 为什么要写成两种形式?

(4) 麦克斯韦方程组在电磁理论中的地位如何?

4-8 变化的电场所产生的磁场，是否也一定随时间而变化? 反之，变化的磁场产生的电场，是否也一定随时间而变化?

4-9 当一块金属在均匀磁场中作什么样的运动时，其中才会出现感应电流?

4-10 试把感应电场与静电场、恒定电场、恒定磁场分别作一比较。

4-11 试证穿出闭合面的位移电流等于其内的电荷增加率。

4-12 在无源自由空间中，$B = B_m \sin \omega t$ 是否满足麦克斯韦方程组? 由此能得出什么样的结论?

4-13 怎样用复数写出正弦稳态电磁场的基本方程组?

4-14 当媒质的物理参数 ε、μ 和 γ 在不同媒质交界面上发生突变时，对电磁场的分析研究必须作怎样的处理? 试写出时变电磁场中不同媒质分界面上的衔接条件? 理想介质与理想导体分界面处的衔接条件如何?

4-15 什么是时变电磁场的折射定律?

4-16 设空间电磁场中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 只有 y 方向分量

$$E_y = \begin{cases} E_0 \cos \omega (z/c - t) & z > 0 \\ E_0 \cos \omega (z/c + t) & z < 0 \end{cases}$$

试问产生此电磁场的电流源分布如何?

4-17 时变电磁场中是如何引入动态位 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 的? 它们各自满足什么方程? 何谓洛仑兹条件? 动态位 $\boldsymbol{A}$、φ 与恒定电场和恒定磁场中的电位 φ、磁矢位 $\boldsymbol{A}$ 间的关系如何? 为什么常把它们叫做推迟位?

4-18 何谓电磁场的能量守恒定律? 叙述坡印亭定理的物理意义，并解释其中各项的含意是什么。

4-19 试证在同轴电缆(设其内外导体均为理想导体)中沿任一横截面内传输的坡印亭矢量的通量等于负载吸收的功率。

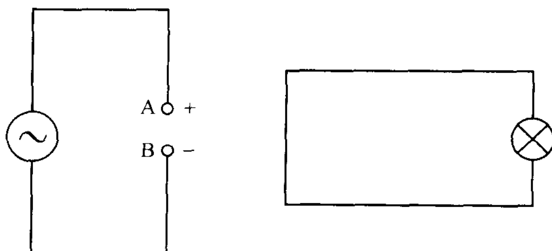
4-20 利用坡印亭定理，如何求导电媒质在交流情况下的等效电路参数?

4-21　复数坡印亭定理的方程式中各项的物理意义如何解释？

4-22　似稳电磁场是如何定义的？它的特性是什么？似稳条件是什么？

4-23　写出动态位解答的一般表达式，并由此讨论时变电磁场的波动性及推迟效应。

4-24　在一个振荡偶极子附近有一个线圈，其中接上一个电灯泡，如图所示



思考题 4-24 图

（1）当偶极子的两端与交流电源相接时，灯泡就会亮起来，为什么？

（2）如果偶极子与直流电源相接时，灯泡是否会亮？

（3）当偶极子 A 带正电，B 带负电，而且电荷在增加，问此时流过灯泡的电流方向怎样？

（4）如果把线圈平面转过 90°，使线圈平面垂直于纸面，此时上述各种变化对灯泡的影响如何？

4-25　在单元偶极子激励的电磁场中，按什么条件将其分成“近区”与“远区”？又在远区中，电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 和坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 各具有什么特征？

4-26　辐射电阻是否意味着天线在辐射电磁能量时的损耗或阻力？它与哪些参数有关？

4-27　试用直接代入法证明推迟位满足达朗贝尔方程和洛仑兹条件。

4-28　当电磁波到达天线时，天线中是否有电流产生？

4-29　设有一内阻为零的高频电源向某一单元辐射子天线供电，该天线的长度 $\Delta l = 5\text{m}$，天线中的电流 $I = 35\text{A}$，电源的频率 $f = 10^6\text{Hz}$，求电源的电压及输出的功率。

4-30　什么叫波阻抗？它与哪些物理量有关？是否意味着电磁波在传播过程中的损耗？

4-31　什么是电磁辐射？为什么会产生电磁辐射？

习　题

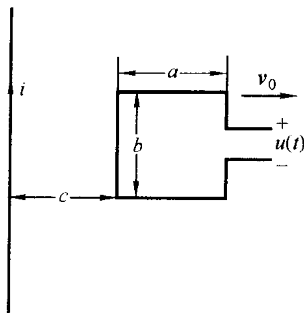
4-1　长直导线中通过电流 i，一矩形导线框置于其近旁，两边与直导线平行，且与直导线共面，如题 4-1 图所示。

（1）设 $i = I_m\cos\omega t$，求回路中的感应电动势(设框的尺寸远小于正弦电流的波长)。

（2）设 $i = I_0$，线框环路以速度 v_0 向右平行移动，求感应电动势。

（3）设 $i = I_m\cos\omega t$，且线框又向右平行移动，再求感应电动势。

4－2　已知一种有损耗媒质中的传导电流密度为 $J=0.02\sin 10^9 t\ \mathrm{A/m^2}$，若媒质的 $\gamma=10^3\ \mathrm{S/m}$，$\varepsilon_r=6.5$，求位移电流密度。



题 4－1 图

4－3　由圆形极板构成的平行板电容器，板间距离为 d，板间充满了有损耗媒质，其电导率为 γ，介电常数为 ε，磁导率为 μ_0。当外加电压 $u=U_m\sin\omega t$ 时，求极板间任意一点的位移电流密度和磁感应强度(忽略边缘效应,且不考虑变化磁场对电场的影响)。

4－4　圆柱形电容器的内导体半径为 a，外导体半径为 b，长为 l，外加一正弦电压 $u=U\sin\omega t$。设 ω 不大，故电场分布与静态场情形相同。求介质中的位移电流密度，并计算穿过半径为 ρ 的圆柱表面的总位移电流，证明此电流就等于电容器引线中的传导电流($a<\rho<b$)。

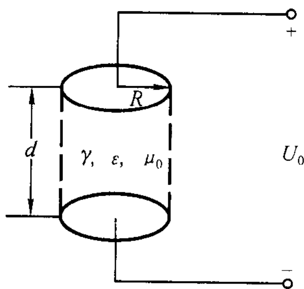
4－5　如图所示，由圆形极板构成的平板电容器，两板之间充满电导率为 γ、介电常数为 ε、磁导率为 μ_0 的非理想介质。把电容器接到直流电源上，求该系统中的电流及电容器极板之间任一点的坡印亭矢量，并证明其中消耗的功率等于电源供给的功率。

4－6　已知自由空间中电磁波的两个场分量表达式为

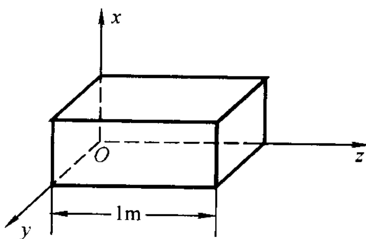
$$E_x = 1000\cos(\omega t-\beta z)\ \mathrm{V/m}$$

$$H_y = 2.65\cos(\omega t-\beta z)\ \mathrm{A/m}$$

式中，$f=20\ \mathrm{MHz}$，$\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=0.42\ \mathrm{rad/m}$。求：(1)瞬时坡印亭矢量；(2)平均坡印亭矢量；(3)流入图示的平行六面体(长为 1 m,横截面积为 $0.25\ \mathrm{m^2}$)中的净瞬时功率。



题 4－5 图



题 4－6 图

4－7　已知空气中的电场为

$$\boldsymbol{E} = 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t-\beta z)\,\boldsymbol{e}_y$$

求相应的 $\boldsymbol{H}$ 以及 β。

4－8　同轴电缆内导体半径为 $a=1\ \mathrm{mm}$，外导体半径为 $b=4\ \mathrm{mm}$。内外导体均是理想导体。内外导体之间填充满聚乙烯($\varepsilon_r=2.25,\mu_r=1,\gamma=0$)。已知聚乙烯中的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{100}{\rho}\cos(10^8 t-\beta z)\,\boldsymbol{e}_\rho\ \mathrm{V/m}$$

式中，z 是沿电缆轴线的长度坐标。(1)说明 E 的表达式是否表示有波动性；(2)求 β 值；(3)求 $\boldsymbol{H}$ 的表达式；(4)求内导体表面的电流线密度；(5)求沿轴线 $0 \leqslant z \leqslant 1$ m 区段中的位移电流。

4-9 已知动态位 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 分别是(圆柱坐标系)

$$\boldsymbol{A} = (1/2)(x^2 + y^2)\sin at\boldsymbol{e}_z + \nabla\psi;$$

$$\varphi = -\partial\psi/\partial t$$

ψ 是任意函数，a 是常数。试求 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$。

4-10 垂直放置的单元偶极子作为辐射天线，已知 $q_m = 3\times10^{-7}$C，$f = 5$ MHz，$\Delta l = 10$ m，分别求与地面成40°角度、离偶极子中心为30 m和5 km处的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表达式。

4-11 单元偶极子辐射电磁波频率 $f = 10^6$ Hz，天线长度 $\Delta l = 10$ m，天线中电流 $I = 35$ A，求天线的辐射电阻与辐射功率。

4-12 一发射天线位于坐标原点，离天线较远处测得天线激发的电磁波的场强为

$$\boldsymbol{E}(r,t) = E_0\frac{\sin\theta}{r}\sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\boldsymbol{e}_\theta \text{ V/m}$$

式中 c 为真空中的光速。求天线辐射的平均功率。

4-13 在均匀的非导电媒质($\gamma = 0$)中，已知时变电磁场为

$$\boldsymbol{E} = 30\pi\cos\left(\omega t - \frac{4}{3}y\right)\boldsymbol{e}_x \text{ V/m}$$

$$\boldsymbol{H} = 10\cos\left(\omega t - \frac{4}{3}y\right)\boldsymbol{e}_z \text{ A/m}$$

且媒质的 $\mu_r = 1$。由麦克斯韦方程求出 ω 和 ε_r。

4-14 已知正弦电磁场的电场瞬时值为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = 0.03\cos(10^8\pi t - \beta z)\boldsymbol{e}_x + 0.04\sin\left(10^8\pi t - \beta z - \frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{e}_x$$

试求：(1)电场的复数形式；(2)磁场的复数形式和瞬时值。

第五章　准静态电磁场

时变电磁场中，当感应电场远小于库仑电场$\left(\text{即可忽略}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$时，称为电准静态场(记作 EQS[1])；当位移电流密度远小于传导电流密度$\left(\text{即可忽略}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)$时，称为磁准静态场(记作 MQS[2])。电准静态场和磁准静态场统称为准静态电磁场(简称准静态场)，都具有静态场的一些性质。本章首先讨论它们的特点、各自的基本方程组和判别方法，以及与电路理论的关系。

本章着重讨论导体中的准静态电磁场问题：(1)电准静态场，包括自由电荷在导体中的弛豫过程和自由电荷在分界面上的积累过程；(2)磁准静态场，包括导体中的电流流动、涡流和磁扩散过程。本章对集肤效应、邻近效应和电磁屏蔽等现象定性地作了说明。还介绍了导体的交流内阻抗概念。

§5－1　电准静态场与磁准静态场

各种宏观电磁现象都可用特定条件下的麦克斯韦方程组来描述。例如静电场和恒定磁场的条件是全部场量都不随时间变化。然而，实际还常常碰到这样的情况，电磁场虽随时间变化但变化很缓慢，此时麦克斯韦方程组中的$\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$或$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$可以忽略，这样一种随时间缓慢变化的电磁场称为准静态电磁场。

根据忽略$\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$或$\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$的不同，准静态电磁场分作电准静态场和磁准静态场两类。它们的特点是：都属时变电磁场但却具有静态场的一些性质。

5.1.1　电准静态场

在麦克斯韦方程(4－21)中忽略电磁感应项$\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$时，或者说时变电磁场中各处感应电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$远小于库仑电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{c}}$，电场呈现无旋时

---

① EQS—Electroquasistatic

② MQS—Magnetoquasistatic

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times (\boldsymbol{E}_c + \boldsymbol{E}_i) \approx \nabla \times \boldsymbol{E}_c = 0 \tag{5-1}$$

这样的电磁场称为电准静态场(记作 EQS)。此时，电场可按静态场处理。电准静态场的微分形式的基本方程组是

$$\nabla \times \boldsymbol{E} \approx 0 \tag{5-2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{5-4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5-5}$$

从上述方程组看出在 EQS 近似下，同静态情况相比，只是磁场的方程发生变化(此处考虑了位移电流引起的磁场)，而电场的方程没有改变。电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电通密度$\boldsymbol{D}$ 的方程与静电场中对应的方程完全一样。所不同的是，现在 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 都是时间的函数，但它们和源 ρ 之间具有瞬时对应关系，即每一时刻，场和源之间的关系类似于静电场中场和源的关系。这样只要知道电荷分布，就完全可以利用静电场的公式，确定出 $\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{D}$，磁场 $\boldsymbol{H}$ 能够通过解(5-3)式和(5-5)式得到。

低频交流情况下，平板电容器中的电磁场属于电准静态场。应该指出，有时虽然感应电场 $\boldsymbol{E}_i$ 不小，但其旋度$\nabla \times \boldsymbol{E}_i$ 很小时，式(5-1)成立，亦可按电准静态场考虑。例如低频交流电感线圈导线中的电场可按恒定电场考虑，感应电场并不影响 $\boldsymbol{J}$ 的均匀分布。

例 5-1 有一圆形平行板空气电容器，极板半径 $R = 10$ cm。边缘效应可以忽略。现设有频率为 50 Hz、有效值为 0.1 A 的正弦电流通过该电容器。求电容器中的磁场强度。

解： 电容器中位移电流密度

$$J_d = \frac{i}{\pi R^2}$$

式中电流 $i = 0.1\sqrt{2}\cos 314t$ A。设圆柱坐标系的 z 轴与电容器的轴线重合。选择一圆形回路 l，运用全电流定律，得

$$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = J_d \pi \rho^2$$

式中 ρ 为观察点与 z 轴之间的垂直距离，$\boldsymbol{\rho}$ 的方向由 z 轴指向观察点，于是

$$2\pi\rho H = \frac{\pi\rho^2}{\pi R^2} i$$

$$H = \frac{\rho}{2\pi R^2} i = 2.25\rho\cos 314t \text{ A/m}$$

$\boldsymbol{H}$ 的方向为$\boldsymbol{J}_d \times \boldsymbol{\rho}$ 方向。

5.1.2 磁准静态场

在麦克斯韦方程(4－20)中忽略位移电流密度项 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 时，磁场可按恒定磁场处理，即

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \approx \boldsymbol{J} \tag{5-6}$$

这样的电磁场称为磁准静态场(记作 MQS)。磁准静态场的微分形式的基本方程组是

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{5-7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5-8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{5-9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{5-10}$$

从上述方程组看出在 MQS 近似下，同静态情况相比，只是电场的方程发生了变化(此处考虑了电磁感应)，而磁场的方程没有改变。

同恒定磁场一样，磁准静态场中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 与动态位 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 之间仍然有关系式

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \tag{5-11}$$

且 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 分别满足微分方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \quad \text{和} \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{5-12}$$

可见，虽然 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 都是随着时间变化的，但磁准静态场却遵循静态场的规律。因此，在计算 $\boldsymbol{A}$、φ 时，只要知道电流和电荷分布，就完全可以利用静态情况下的公式。也就是说，可以略去电磁场的波动性，认为场和源之间具有类似于静态场中场和源之间的瞬时对应关系。所以也称这种场为似稳场。

电磁场从随时间变化的场源传播出去，位移电流 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 是这种传播的先决条件。忽略了位移电流，就意味着不考虑电磁场的波动性，所以瞬时对应关系即是略去位移电流项的结果。现在来研究在什么情况下，略去位移电流项才算是合理的。

首先，对于导体内的时变电磁场来说，如果有条件

$$\frac{\omega \varepsilon}{\gamma} \ll 1 \quad \text{或} \quad \omega \varepsilon \ll \gamma \tag{5-13}$$

成立，位移电流就可以忽略。此时，导体中的时变电磁场可按磁准静态场来处理。通常把导体中的磁准静态场也叫做涡流准静态场，简称涡流场。把满足条

件(5-13)式的导体称为良导体。对于纯金属来说 $\gamma \approx 10^7$ S/m, $\varepsilon \approx \varepsilon_0$,便得 $\omega \ll 10^{17}$ 1/s。可见,在导体中一直到紫外波长都允许将位移电流略去。

其次,对于理想介质中的时变电磁场来说,从第 4 章中我们知道这样一个事实:假定在场源处产生了随时间作正弦变化的电场 $E = \mathrm{Re}[E_0 e^{j\omega t}]$,那么与场源相距 $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 处的场对时间的相依关系具有如下的形式

$$E \approx \mathrm{Re}\left[E_0 e^{j\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)}\right]$$

这里 $e^{-j\frac{\omega R}{v}}$ 是表明推迟效应的因子。要使场与源之间近似地具有瞬时对应关系即忽略推迟效应,就要求

$$e^{-j\frac{\omega R}{v}} \approx 1$$

即

$$\frac{\omega R}{v} = \frac{2\pi R}{\lambda} \ll 1 \qquad \text{或} \qquad R \ll \lambda \tag{5-14}$$

这就是理想介质中的时变电磁场可按磁准静态场处理的条件。它表明当场点到源点的距离 R 远小于场的波长 λ 时,略去位移电流才是合理的,这就说明了磁准静态场在理想介质中的存在范围。把满足条件(5-14)式的区域称为近区或似稳区。在近区或似稳区中,电磁场的分布遵守静态场的规律,随时间与源同步变化而没有相位移。条件(5-14)式也说明,如果系统用准静态方法处理,载流系统的尺寸必须远小于电磁波的波长 λ。

低频交流线圈中的磁场属于磁准静态场。再之,一根同轴电缆传送交变的电磁功率,假如从电源到负载的距离满足条件(5-14)式,那么该同轴电缆内的电磁场问题就可作为似稳场处理。

条件(5-13)式和(5-14)式都叫做 MQS 近似条件或似稳条件。应当注意,似稳区是一个相对的概念。

习　题　(5-1)

5-1-1　由圆形极板构成的平行板电容器,间距为 d,其间介质是非理想的,电导率为 γ,介电常数为 ε,磁导率为 μ_0,当外加电压为

$$u = U_m \cos \omega t \ \mathrm{V}$$

时,忽略电容器的边缘效应。试求电容器中任意点的位移电流密度和磁场强度(假设变化的磁场产生的电场远小于外加电压产生的电场)。

5-1-2　已知大地的电导率 $\gamma = 5 \times 10^{-3}$ S/m,相对介电常数 $\varepsilon_r = 10$,试问可把大地视为良导体的最高工作频率是多少?

§5-2　磁准静态场和电路

磁准静态场方程是交流电路的场理论基础。可说明如下:

根据方程(5－7)式，可推得基尔霍夫电流定律。将方程(5－7)式的两边取散度得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

它的积分形式是

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{5-15}$$

其中 S 是电磁场中任意的闭合曲面。这说明流出任意闭合曲面的总传导电流是零，即传导电流是连续的。在图5－1中，i_1、i_2、i_3 是由三条导线流出节点的电流。在包围该节点的任意闭合面 S 上求电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的积分，则

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_2} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_{S_3} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

或

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

这就是电路理论中的基尔霍夫电流定律：由电路中任一节点流出的总电流等于零，$\Sigma i = 0$。

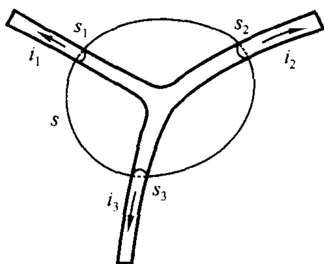


图5－1 磁准静态场中电流连续性与基尔霍夫电流定律的关系

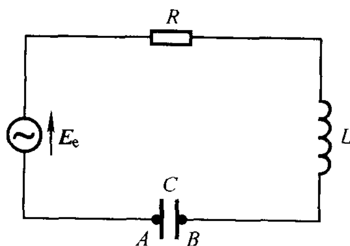


图5－2 磁准静态场方程与基尔霍夫电压定律的关系

现在推导基尔霍夫电压定律。考虑磁准静态场中一个由电阻、电感和电容串联的电路，如图5－2所示。由于在MQS近似中传导电流是连续的，所以电路中任一时刻 t 的电流 $i(t)$ 处处相等。电路中任一点的传导电流密度是

$$\boldsymbol{J} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_\mathrm{e}) \tag{5-16}$$

式中，$\boldsymbol{E}_\mathrm{e}$ 是电源内部的局外场强。考虑到(5－11)式，则有

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{e} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \varphi + \frac{\boldsymbol{J}}{\gamma} \tag{5-17}$$

若沿着导线由 A 到 B 作积分，则有

$$\int_A^B \boldsymbol{E}_\mathrm{e} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_A^B \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_A^B \nabla \varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_A^B \frac{\boldsymbol{J}}{\gamma} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{5-18}$$

由于局外场强只存在于电源中，等式左端一项是电源的电动势 $\mathscr{E}(t)$。右端第

一项由于电容器极板间距离很小近似于闭合积分，而 $\boldsymbol{A}$ 的闭合积分是磁链，故这一项是感应电动势。由于外电路的磁通远小于电感线圈中的磁链，故该项应等于 $L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$。右端第二项是标位梯度的线积分，积分数值与路径无关，可在电容器内部积分，所以这一项等于极板间的瞬时电压 u。因 $u=\dfrac{q}{C}=\dfrac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$，所以此项等于$\dfrac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$。右端第三项的被积函数可写为$\dfrac{|\boldsymbol{J}|}{\gamma}=\dfrac{i}{\gamma S}$，$S$ 是电流穿过的横截面面积。沿线的电流 i 处处相等，所以线积分应等于包括电源电阻 R_{i}，导线电阻 r 和电阻器的电阻R 在内的总电阻与i 的乘积，即 $i(R_{\mathrm{i}}+r+R)$。综上所述，(5-18)式可写为

$$\mathscr{E}(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t+i(R_{\mathrm{i}}+r+R)$$

$$或\ \mathscr{E}(t)=U_L+U_C+U_R$$

这就是电路理论中的基尔霍夫电压定律。

由上述可见，交流电路中的基尔霍夫电流、电压定律等效于磁准静态场的方程式(5-7)式、(5-8)式、(5-9)式和(5-10)式。也就是说，电路理论不过是在特殊条件下的麦克斯韦电磁理论的近似。研究实际电磁问题时，究竟采用场的方法，还是采用路的方法，要看具体问题的条件而定。

当系统的尺寸远小于波长时，推迟效应可以略去，这时就可以应用磁准静态场定律来研究。必须注意，这里是以尺寸与波长之比为判据而不是以绝对尺寸大小和频率的高低为判据。例如工频 50 Hz 时空间波长为 6000 km，因此只有跨越数百公里的长距离输电才需要考虑波动过程。而到了微波波段，例如频率为 3 GHz，空间波长为 10 cm，则手掌大小的一个系统就需要考虑波动过程，而不能当做电路问题来处理了。再如，电偶极子的辐射问题等，则要求用场的方法进行分析。

例 5-2 用磁准静态场的方法处理同轴电缆内的电磁问题。

解： 考虑一根同轴电缆传送交变的电磁功率，假如从电源到负载的距离远小于六分之一波长。

如图 5-3 所示，假如同轴线的内外导体是用理想导体做成，加上电源之后，忽略边缘效应，同轴线中的电场、磁场强度分别是

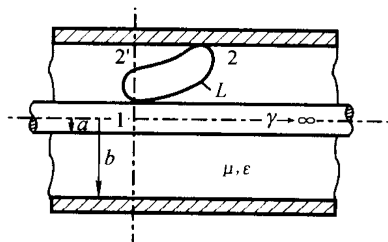


图 5-3 同轴线中的磁准静态场

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{\dot{U}}{\rho\ln b/a}\boldsymbol{e}_\rho \qquad (5-19)$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\dot{I}}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi \tag{5-20}$$

式中 $\dot{U}$ 是内外导体间的复电压，$\dot{I}$ 是沿导体流过的纵向复电流。

内外导体之间的坡印亭矢量是

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^* = \frac{\dot{U}\dot{I}^*}{2\pi\rho^2 \ln b/a}\boldsymbol{e}_z$$

同轴线传输的平均功率应是坡印亭矢量在内外导体之间的横截面 S 上的面积分，即

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{Re}\left[\iint_S \frac{\dot{U}\dot{I}^*}{2\pi\rho^2 \ln b/a}\mathrm{d}S\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{\dot{U}\dot{I}^*}{\ln b/a}\int_a^b \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right] = \mathrm{Re}[\dot{U}\dot{I}^*]$$

可见，用磁准静态场的理论计算同轴线传输功率与应用电路理论计算的结果一致。

应当强调指出，上例中电压的概念只在同轴线的同一个横截面上的两点之间有意义。这是因为，在时变电磁场中 $\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$。在图 5-3 中，如果不是在横截面上而是在纵剖面上取闭曲线 L，并沿 L 作 $\boldsymbol{E}$ 的线积分，则

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint_L \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} - \oint_L \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \neq 0$$

只有在横截面的闭合路径上才有 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，因为在这种闭合路径所限定的面积上没有磁通。

习 题 (5-2)

5-2-1 同题 5-1-1，假如圆形极板的面积是 A，在频率不很高时，用坡印亭定理证明电容器内由于介质的损耗所吸收的平均功率是

$$P = \frac{U^2}{R}$$

式中 R 是极板间介质的漏电阻。

5-2-2 同轴电缆接至正弦电源 u，负载为一 RC 串联电路。电缆长度远小于波长，电缆本身电阻可以忽略不计。试用坡印亭向量计算电缆传输的功率。

§5-3　电准静态场与电荷弛豫

本节以自由电荷在导体中的弛豫过程为例，介绍电准静态场的分析方法。其中引进标量电位函数 φ，并导出 φ 的偏微分方程。

5.3.1　电荷在均匀导体中的弛豫过程

在具有均匀的电导率 γ 和介电常数 ε 的导体区域内，电荷守恒原理和高斯定律确定了整个体积内的自由电荷分布及其随时间的变化规律。对(5－3)式的两边取散度，并考虑到 $\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，有

$$\gamma\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{5-21}$$

设导体中的自由电荷密度为 ρ，而 $\rho=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}$，则 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$，将它代入上式，有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\gamma}{\varepsilon}\rho=0 \tag{5-22}$$

该一阶常微分方程的解为

$$\rho=\rho_0(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{e}}} \tag{5-23}$$

式中 $\rho_0(x,y,z)$ 为 $t=0$ 时的 ρ，$\tau_{\mathrm{e}}\left(=\dfrac{\varepsilon}{\gamma}\right)$称为弛豫时间。这个结果表明，导体中的自由电荷体密度随时间按指数规律衰减，其衰减的快慢决定于弛豫时间 τ_{e}。把这个衰减过程称为电荷的弛豫，由于良导体的 τ_{e} 远小于1，所以一般可认为良导体内部无自由电荷的积累，即 $\rho=0$。

现在研究电荷的弛豫过程中导体内的电位分布。由于在 EQS 近似下，有 $\nabla\times\boldsymbol{E}\approx0$，因此可定义电位函数如下

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi \tag{5-24}$$

代入(5－4)式，得

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

考虑到(5－23)式，则有

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho_0}{\varepsilon}\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{e}}} \tag{5-25}$$

这就是支配电位变化所要求的偏微分方程。对于无限空间处处充满同一种导电媒质的情况，其解为

$$\varphi(x,y,z,t)=\int_V\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon R}\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{e}}}\mathrm{d}V=\varphi_0(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{e}}} \tag{5-26}$$

式中 $\varphi_0(x,y,z)=\int_V \frac{\rho_0 \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon R}$ 为 $t=0$ 时的电位分布。这个结果表明，导体中的电位分布随时间也按指数规律衰减，其衰减的快慢同样决定于弛豫时间 τ_e。对于点电荷情况，有 $\varphi=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon R}\mathrm{e}^{-t/\tau_e}$，而磁场处处、时时均为零。

例 5-3　今有一无限大金属平板，其上方的半无限空间内充满了均匀的不良导体(介电常数 ε，电导率 γ)，如图 5-4 所示。在 $t=0$ 瞬时，在该导体中已形成了一球形自由电荷云，球内自由电荷体密度为常量 ρ_0。问电荷弛豫过程中，电位如何分布？

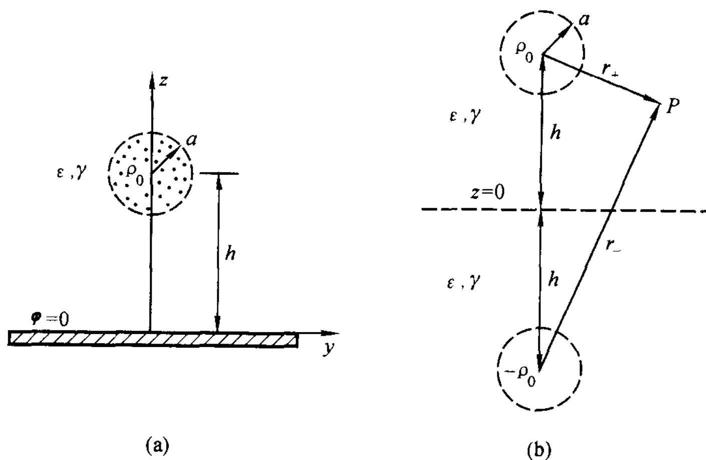


图 5-4　球形电荷在不良导体内的弛豫

解：采用镜像法(见图 5-4(b))以保证满足边界条件：$z=0$ 处，电位 $\varphi=0$。原电荷云建立的电位

$$\varphi'=\begin{cases}\dfrac{3a^2-{r_+}^2}{6\varepsilon}\rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau_e} & (r_+<a)\\[2mm] \dfrac{a^3}{3\varepsilon r_+}\rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau_e} & (r_+>a)\end{cases}$$

镜像电荷云建立的电位

$$\varphi''=-\frac{a^3}{3\varepsilon r_-}\rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau_e}$$

结果为 $\varphi=\varphi'+\varphi''$，所以

$$\varphi=\begin{cases}\left(\dfrac{3a^2-{r_+}^2}{6\varepsilon}-\dfrac{a^3}{3\varepsilon r_-}\right)\rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau_e} & (r_+<a)\\[2mm] \dfrac{a^3}{3\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_+}-\dfrac{1}{r_-}\right)\rho_0\mathrm{e}^{-t/\tau_e} & (r_+>a)\end{cases}$$

5.3.2 电荷在分片均匀导体中的弛豫过程

当区域中存在分片均匀导体时，自由电荷趋向于聚积在两种导体的分界面上，这种积累过程是比较复杂的。在分界面两侧，关系式

$$E_{1t} = E_{2t} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \tag{5-27}$$

和

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = \sigma \tag{5-28}$$

仍然成立。另外，表示电荷守恒原理 $\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 的连续性条件是

$$J_{2n} - J_{1n} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \tag{5-29}$$

当应用 $\boldsymbol{J} = \gamma E$ 时，这个连续性条件变成

$$(\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n}) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \tag{5-30}$$

(5-28)式和(5-30)式相结合组成一个新的连续性条件

$$(\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n}) = 0 \tag{5-31}$$

这个连续性条件和关于切向场的连续性条件(5-27)式，是在分片均匀导体系统中把表示场的一些解答结合在一起所需要的。

例 5-4 研究具有双层有损介质的平板电容器接至直流电压源的过渡过程，如图 5-5 所示。

解： 当 $t = 0$ 时，开关闭合，电源电压加到两个电极间，而后将出现过渡过程。该过程可分为两阶段：第一阶段在 $0_- \leqslant t < 0_+$，即开关接通前后无限短时间间隔内，将出现无限大冲激电流，使电容器两极板突然分别带电荷 $+q$ 和 $-q$。第二阶段在冲激过后的 $t > 0_+$ 时期，呈现连续的过渡过程。今分析第二阶段过渡过程。由于电压较高而电流较小，故库仑电场强，磁场弱，磁场随时间变化产生的感应电场可忽略，可按电准静态场分析。

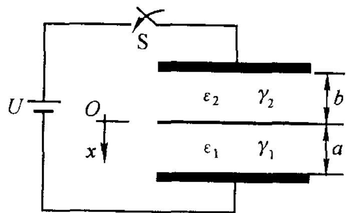


图 5-5 具有双层有损介质的平板电容器

假定极板面积足够大，忽略边缘效应，每层介质中的电场可看成是均匀的

$$E = \begin{cases} E_1(t)\,\boldsymbol{e}_x & 0 < x < a \\ E_2(t)\,\boldsymbol{e}_x & -b < x < 0 \end{cases} \tag{5-32}$$

电压源电压 $u(t)$为板间电场的线积分，有

$$\int_{-b}^{a} E_x \mathrm{d}x = u(t) = aE_1 + bE_2 \tag{5-33}$$

此外，在分界面处，还有连续性条件(5-31)式，这里即

$$(\gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2) = 0 \tag{5-34}$$

注意在分界面处关于切向 E 的条件是自然满足的。联立求解(5-33)式和(5-34)式,可得 E_1 和 E_2。若先消去 E_2，则

$$(b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2)\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}t} + (b\gamma_1 + a\gamma_2)E_1 = \gamma_2 u + \varepsilon_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{5-35}$$

这里考虑对阶跃电压 $u = U\varepsilon(t)$ 的响应(此处 $\varepsilon(t)$ 为单位阶跃函数)。于是(5-35)式右边的激励由阶跃和冲激组成。这一冲激必须有左边的冲激与它相等。即当 $t=0$ 时,场 E_1 也经受一阶跃变化。要确定此阶跃的幅度,将上式从 0_- 到 0_+ 积分，有

$$(b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2)\int_{0_-}^{0_+}\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + (b\gamma_1 + a\gamma_2)\int_{0_-}^{0_+}E_1\mathrm{d}t = \gamma_2\int_{0_-}^{0_+}u\mathrm{d}t + \varepsilon_2\int_{0_-}^{0_+}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

由此得

$$\left(\varepsilon_1 + \frac{a}{b}\varepsilon_2\right)[E_1(0_+) - E_1(0_-)] = \frac{\varepsilon_2}{b}[u(0_+) - u(0_-)]$$

由于 $u(0_-) = 0$ 和 $E_1(0_-) = 0$, 可得

$$E_1(0_+) = \frac{\varepsilon_2}{b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2}U \tag{5-36}$$

但在 $t > 0_+$ 时,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$, 故(5-35)式的一般解是

$$E_1 = \frac{\gamma_2}{b\gamma_1 + a\gamma_2}U + A\mathrm{e}^{-t/\tau_e} \tag{5-37}$$

式中 τ_e 称为弛豫时间

$$\tau_e = \frac{b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2}{b\gamma_1 + a\gamma_2} \tag{5-38}$$

根据条件(5-36)式决定待定常数，得

$$A = \frac{\varepsilon_2 U}{b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2} - \frac{\gamma_2 U}{b\gamma_1 + a\gamma_2}$$

这样，可求得在下面一层介质中场的瞬变过程为

$$E_1=\frac{\gamma_2 U}{(b\gamma_1+a\gamma_2)}(1-e^{-t/\tau_e})+\frac{\varepsilon_2 U}{b\varepsilon_1+a\varepsilon_2}e^{-t/\tau_e} \tag{5-39}$$

然后从(5-33)式得到上面一层的场为

$$E_2=\frac{\gamma_1 U}{(b\gamma_1+a\gamma_2)}(1-e^{-t/\tau_e})+\frac{\varepsilon_1 U}{b\varepsilon_1+a\varepsilon_2}e^{-t/\tau_e} \tag{5-40}$$

分界面上的自由电荷密度为

$$\begin{aligned}\sigma&=\varepsilon_1E_1-\varepsilon_2E_2\\&=\frac{\varepsilon_1\gamma_2-\varepsilon_2\gamma_1}{b\gamma_1+a\gamma_2}U(1-e^{-t/\tau_e})\end{aligned} \tag{5-41}$$

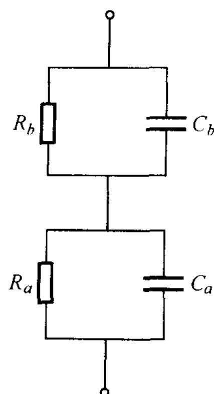


图 5-6　双层有损介质平板电容器的电路模型

应当注意的是：当极板上电荷或电压突变的瞬时，介质分界面上的自由电荷 σ 来不及突变仍保持为零。因此开始时两介质中的电场就如同两层都是理想介质时一样。随着面电荷的积累，这些场趋近于和稳定传导相一致，电场按电导率分布，其电路模型如图 5-6 所示。

可以这样指出，多层有损介质在低频交流电压作用下，若位移电流远大于介质中的漏电流，则电场按介电常数分布，属静电场问题；而在直流电压作用下，稳态仅有传导电流，电场按电导率分布，属恒定电流场问题。

习　题　(5-3)

5-3-1　$y<0$ 下半空间区域 b 充以均匀导体(电导率 γ，介电常数 $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$)；$y>0$ 上半空间区域 a 属真空。$t<0$ 时处处无电荷。在 $t=0$ 时，有一点电荷 q 突然放置在上半空间 $(x,y,z)=(0,h,0)$ 处。试证明：

(1) 在 $t=0_+$ 时

$$\varphi_a=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-h)^2+z^2}}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y+h)^2+z^2}}$$

$$\varphi_b=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+(y-h)^2+z^2}}$$

式中

$$q'=q\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1},\qquad q''=q\frac{2}{\varepsilon_r+1}$$

(2) 当 $t\to\infty$ 时

$$q'\to q,\quad \varphi_b\to 0$$

(3) 当 $t>0$ 期间

$$q'=q\left(1-\frac{2}{\varepsilon_r+1}e^{-t/\tau_e}\right)$$

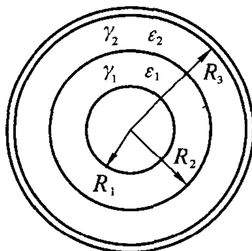
$$q'' = q\left(\frac{2}{\varepsilon_r + 1}e^{-t/\tau_e}\right)$$

式中
$$\tau_e = \frac{\varepsilon + \varepsilon_0}{\gamma}$$

5-3-2　具有双层介质的电容器如图 5-5 所示。已知 $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0, \varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, \gamma_1 = 3\times10^{-8}$ S/m，$\gamma_2 = 10^{-8}$ S/m，$a = b = 10^{-3}$ m, $U = 100$ V。计算电容器接至直流电压源 U 后电场的过渡过程。

5-3-3　同上题，但接至工频交流电源。试计算进入交流稳态后两介质内电场之间的相位差。

5-3-4　有一圆柱形电容器，尺寸如题 5-3-4 图，其中介质有两层。由于介质有漏电流，故考虑为导电媒质。电容器不带电。若 $t=0$ 时，突然接至直流电压源 U，内外导体分别接正负极。分析：(1) $t=0_+$ 时，电场分布；(2) $t\to\infty$ 时，电场分布。



题 5-3-4 图

§5-4　集肤效应

当交变电流流过导线时，导线周围变化的磁场也要在导线中产生感应电流，从而使沿导线截面的电流分布不均匀。尤其当频率较高时，此电流几乎是在导线表面附近的一薄层中流动，这就是所谓的集肤效应现象。本节讨论在交变情况下导体中电流的流动及其电磁场的分布特性。

5.4.1　$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 的微分方程

在 MQS 近似中，导体中的位移电流密度远小于传导电流密度，可以忽略不计。电磁场所满足的方程组就是(5-7)式、(5-8)式、(5-9)式和(5-10)式。

若将(5-7)式的两边取旋度，并运用恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{F} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}$ 将左边展开，得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}) - \nabla^2\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{J}$$

再利用 $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ 和(5-8)式，(5-10)式消去 $\boldsymbol{J}$，得

$$\nabla^2\boldsymbol{H} = \mu\gamma\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{5-42}$$

同理，可得

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \mu\gamma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{5-43}$$

这就是在 MQS 近似下，导体中任一点电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 满足的微分方程。

方程(5-43)式两边同乘以电导率 γ，并考虑到 $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$，得

$$\nabla^2 \boldsymbol{J} = \gamma\mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \tag{5-44}$$

这就是电流密度 $\boldsymbol{J}$ 满足的微分方程。它是研究时变情况下导体中电流流动问题的基础。

5.4.2 集肤效应

作为一个例子，图 5-7 中 $x>0$ 的半无限大空间为导体，设其中有正弦变化电流 i 沿 y 方向流过，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 只有 y 分量并在 yOz 平面上处处相等。现在研究电流 i 在半无限大导体中的分布。

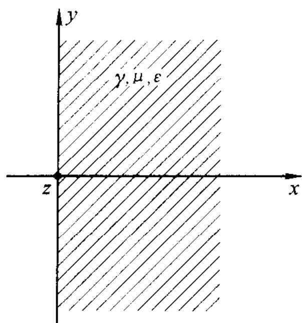


图 5-7 半无限大导体中的电磁场

根据假设条件因电流密度只有 y 分量，而且只是 x 的函数，所以方程(5-44)式简化后的复数形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2 \dot{J}_y}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{j}\omega\mu\gamma \dot{J}_y \tag{5-45}$$

令

$$k^2 = \mathrm{j}\omega\mu\gamma \tag{5-46}$$

则上述二阶常微分方程的一般解是

$$\dot{J}_y = C_1 \mathrm{e}^{-kx} + C_2 \mathrm{e}^{+kx} \tag{5-47}$$

应取 $C_2 = 0$，否则在 $x = +\infty$ 处电流密度将是无限大，这是不可能的。这样，考虑到 $x = 0$ 时，$\dot{J} = J_0$，则

$$\dot{J}_y = J_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{5-48}$$

式中

$$\alpha + \mathrm{j}\beta = k = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}\,(1 + \mathrm{j}) \tag{5-49}$$

电场强度的解为

$$\dot{E}_y = \frac{\dot{J}_y}{\gamma} = \frac{J_0}{\gamma} \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} = E_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{5-50}$$

磁场强度的解可由(5-8)式求得，即

$$\dot{H}_z = -\frac{\mathrm{j}k}{\omega\mu} E_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{5-51}$$

由以上各式看出，电流密度、电场强度和磁场强度的振幅沿导体的纵深都按指数规律 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 衰减，而且相位也随之改变。它说明，当交变电流流过导体时，靠近导体表面处电流密度大，愈深入导体内部，它们愈小。当频率很高时，它们几乎只在导体表面附近一薄层中存在，这种场量主要集中在导体表面附近的现象，称为集肤效应。

工程上常用透入深度 d 表示场量在良导体中的集肤程度。它等于场量振幅衰减到其表面值的 1/e 时所经过的距离。由此定义

$$e^{-\alpha d} = e^{-1}$$

得

$$d = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \tag{5-52}$$

这个结果表明，频率越高，导电性能越好的导体，集肤效应越显著。例如，$f=50$ Hz 时，铜中透入深度为 9.4 mm；当频率 $f=5\times10^{10}$ Hz 时，透入深度为 0.66 μm。经过 13.8 个透入深度距离，场强振幅就衰减到只有表面值的百万分之一。工业上利用高频电流集中在导体表面的特点，对金属构件进行表面淬火处理，以减小金属内部的脆性，增加金属表面的硬度等。

以上分析方法，也适用于交变电流在一定厚度的平板导体或圆柱形导体中流动的问题，只是比上述情况复杂些。同样，这时也存在集肤效应现象。虽然(5－52)式是从表面为无限大的平面导体得出的，但是如果表面曲率半径远大于应用此式算出的透入深度 d，也可用它来近似计算表面为曲面的导体的透入深度。应注意的是，在大于 d 的区域内，场量仍然继续衰减，并不等于零。

习　题　(5－4)

5－4－1　试计算铜和铁通以 50 Hz 交变电流时的透入深度 d。结果对设计大型交流汇流排(工作于 50 Hz)有何作用(铜：$\gamma=5.8\times10^7$ S/m，$\mu_r=1$；铁：$\gamma=10^7$ S/m，$\mu_r=10^4$)？

§5－5　涡流及其损耗

5－4 节分析了当导体自身载有电流时，其内部的电流流动及其电磁场的分布特性。本节将分析导体(自身不载电流)置于外部磁场中时，其内部的电磁场分布和感应电流(也称涡流)分布。下面首先介绍涡流的概念。

5.5.1　涡流

在许多电工设备中都存在有大块导体(如发电机和变压器的铁心和端盖等)。当这些大块导体处在变化的磁场中时，其内部都会感应出电流。这些电流的特点是：在大块导体内部自成闭合回路，呈旋涡状流动。因此，称之为涡旋电流，简称涡流。例如，含有圆柱导体芯的螺管线圈中通有交变电流时，圆柱导体芯中出现的感应电流或涡流，如图 5－8 所示。

涡流在导体内流动时，会产生损耗从而引起导体发热，故它具有热效应。

同样，涡流与其它电流一样也要产生磁场。这个磁场是减弱外磁场的变化，即涡流又具有去磁效应。涡流的这两个效应既有有利的一面，也有有害的一面。工业上利用涡流的热效应进行金属的加热和冶炼，利用涡流的去磁效应制成电磁闸。然而，有些情况下还需要设法减小涡流。因此，研究涡流问题具有实际意义。

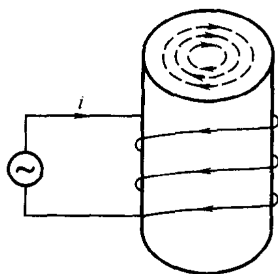


图 5-8 涡流

在 MQS 近似下，涡流问题中的电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 同样遵守上一节导得的微分方程(5-43)式、(5-42)式和(5-44)式。所以，通常也将这些方程称为涡流方程，或磁扩散方程。它们是研究涡流问题的基础。

5.5.2 薄导电平板中的涡流

作为一个例子，研究变压器铁心叠片中的电磁场，如图 5-9 所示。考虑其中一片铁片，看成是一薄导电平板，如图 5-10 所示。

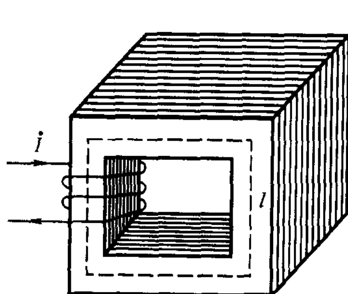


图 5-9 变压器铁心叠片

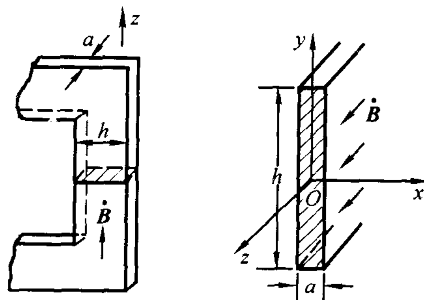


图 5-10 薄导电平板

为了分析薄导电平板中的电磁场分布，做如下假设：

(1) 由于 l 和 $h \gg a$，所以场量 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 等近似为 x 的函数，与 y 和 z 无关；

(2) 由于外磁场 $\boldsymbol{B}$ 沿 z 方向，故板中的涡流无 z 分量，在 xOy 平面内呈闭合路径。又 $a \ll h$，所以可忽略 y 方向两端的边缘效应，认为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 仅有 y 分量 E_y 和 J_y。显然，$\boldsymbol{H}$ 也只有 z 分量 H_z。

根据以上分析，得知方程(5-42)简化后的复数形式是

$$\frac{\mathrm{d}\dot{H}_z}{\mathrm{d}x^2} = k^2\dot{H}_z \tag{5-53}$$

这个方程的一般解是

$$\dot{H}_z = C_1\mathrm{e}^{-kx} + C_2\mathrm{e}^{+kx} \tag{5-54}$$

显然，磁场沿 x 方向的分布应是对称的，

$$\dot{H}_z\left(\frac{a}{2}\right)=\dot{H}_z\left(-\frac{a}{2}\right)$$

故取 $C_1=C_2=C/2$。因此，(5－54)式可改写成

$$\dot{H}_z = C\mathrm{ch}kx \tag{5-55}$$

如果设 $x=0$ 处，$\dot{B}_z(0)=\dot{B}_0$，则 $C\mu=\dot{B}_0$。因此，可得薄板内的磁场强度和磁感应强度分别为

$$\dot{H}_z = \frac{\dot{B}_0}{\mu}\mathrm{ch}kx \tag{5-56}$$

$$\dot{B}_z = \dot{B}_0\mathrm{ch}kx \tag{5-57}$$

利用(5－7)式和 $\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$，可得电场强度和电流密度分别是

$$\dot{E}_y = -\frac{\dot{B}_0 k}{\mu\gamma}\mathrm{sh}kx \tag{5-58}$$

$$\dot{J}_y = -\frac{\dot{B}_0 k}{\mu}\mathrm{sh}kx \tag{5-59}$$

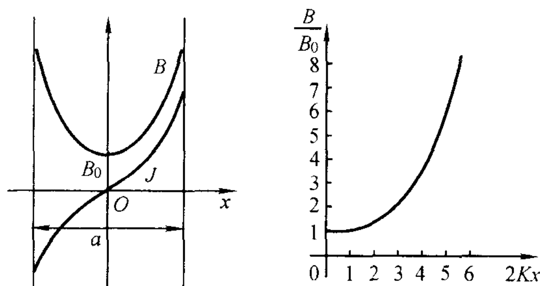


图 5－11　$\dot{\boldsymbol{B}}$和 $\dot{\boldsymbol{J}}$的模值分布曲线

图 5－11 示出了磁感应强度的模 B_z 和电流密度的模 J_y 的分布曲线。图中 $K=\sqrt{\omega\mu\gamma/2}$。可以看出磁场在薄板中心处取最小值，这是由于涡流的去磁效应形成的。涡流电流密度反对称于中心处，中心处为零，在表面处取最大值。还可看出在薄板内部，电场及磁场的分布并不均匀，愈深入内部，场量愈小。场的分布比较集中在薄板表面附近，也呈现出集肤效应现象。对电工钢片来说，一般 $\mu\approx1000\mu_0$，$\gamma=10^7$ S/m，厚度 $a=0.5$ mm。分析结果表明，当工作频率为 $f=50$ Hz时，$d=\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\gamma}}=0.715\times10^{-3}$ m，$\dfrac{a}{d}=0.7$，集肤效应不显著，可以认为 $\boldsymbol{B}$ 还是沿截面均匀分布的。但当工作频率为 $f=2\ 000$ Hz 时，$\dfrac{a}{d}=$

4.4，钢片中间的 $\boldsymbol{B}$ 差不多比表面处要小 4.5 倍。可见在音频时，已不适宜采用 0.5 mm 厚的钢片了，要用更薄的钢片。因此，在设计工作于音频、超音频等较高频率的变压器时，必须考虑集肤效应的影响。

最后，计算钢片中的涡流损耗。在体积 V 中消耗的平均功率为

$$P=\int_V\frac{1}{\gamma}\mid\dot{J}_y\mid^2\mathrm{d}V \tag{5-60}$$

这里，讨论当频率较低的特殊情况。即当 $\dfrac{a}{d}$ 较小时，则

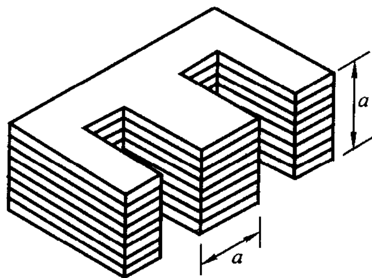
$$P=\frac{1}{12}\gamma\omega^2a^2B_{zav}^2V \tag{5-61}$$

式中 V 是薄板的体积，B_{zav} 是磁感应强度在板厚上的平均值。可以看出，为了减小涡流损耗，薄板应尽量薄，电导率应尽量小。因此，交流电器的铁心都是由彼此绝缘的硅钢片叠装而成的。但当频率高到一定程度后，(5-61)式就不正确了，采用薄板形式也不适宜了，而应该用粉状材料压制而成的铁心。

习　题　(5-5)

5-5-1　电工钢作成的钢片的位置与磁场平行。设磁场以 50 Hz、200 Hz 和 5000 Hz 的频率作正弦变化，求钢片表面和中间处磁感应强度的比值。已知钢片厚 0.5 mm，$\gamma=10^7\mathrm{S/m}$，$\mu=1000\mu_0$。

5-5-2　铁心截面为正方形的 50 Hz 电源变压器，若用一块整硅钢做成会因集肤效应，产生涡流损耗使变压器发热。通常用硅钢片叠成，如图所示。假设磁通在铁心截面上是均匀分布的，证明采用硅钢片后(钢片厚度仍远大于透入深度)，铁心的涡流损耗只有原来的 $\dfrac{2}{N}+1$。式中 N 是钢片数。



题 5-5-2 图

§5-6　导体的交流内阻抗

在交流情况下，由于集肤效应的出现，电流和电磁场在导体内部的分布集中于表面附近。在深度大于数个透入深度 d 后，它们都近似等于零。尽管导体截面相当大，但大部分未得到利用，实际载流截面积减小了。因此，在交流情况下，导体的电阻和内电感与直流时不同。

如果设导体中通有总电流 $\dot{I}$，它的等效交流电路参数为 $Z=R+\mathrm{j}X$，则该导体消耗的复功率为

$$\dot{I}Z\dot{I}^* = I^2(R + jX)$$

又从坡印亭定理知道，流入该导体的复功率也可表示成

$$-\oint_S(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot d\boldsymbol{S}$$

因此，得导体的等效交流电路参数的计算公式为

$$Z = \frac{-\oint_S(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)\cdot d\boldsymbol{S}}{I^2} \tag{5-62}$$

式中 S 为导体的表面，Z 称为等效交流阻抗。从上面分析可知，交流阻抗只计及了导体内部电磁场引起的阻抗，故又称 Z 为导体的交流内阻抗。下面举例说明 Z 的计算问题。

例 5－5　设有半无限大导体，如图 5－12 所示。试求图示斜线柱体体积(底面面积为 $h\times a$)的交流内阻抗。

解：如图所示，导体位于 $x>0$ 半无限大空间，其中电流、电场和磁场沿 x 方向的分布可由 5－4 节中得到

$$\dot{J}_y = \gamma E_0 e^{-kx}$$

$$\dot{E}_y = E_0 e^{-kx}$$

$$\dot{H}_z = -\frac{jk}{\omega\mu}E_0 e^{-kx}$$

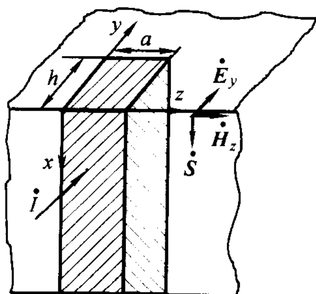


图 5－12　半无限大导体

流过宽度为 a、在 x 方向无限深的截面上的总电流是

$$\dot{I} = \int_S \dot{J}_y dS = a\gamma E_0\int_0^\infty e^{-kx}dx = \frac{a\gamma E_0}{k}$$

在现在情况下，坡印亭矢量的方向沿 x 轴，并且其通量只在导体上底面($x=0$)才不为零。应用(5－62)式，有

$$Z = R + jX = \frac{(\dot{E}_y\dot{H}_z^*)\mid_{x=0}\times h\times a}{\mid\dot{I}\mid^2}$$

$$= \frac{h}{a\gamma}(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \frac{h}{a\gamma d}(1+j)$$

故

$$R = \frac{h}{a\gamma d}\quad 和\quad L_i = \frac{X}{\omega} = \frac{h}{a\gamma d\omega} \tag{5-63}$$

这个结果表明，在导体的整个厚度内，有效值为 I 的交流电流给出的有功功率,等于大小为 I 的直流电流在同一长度 h 和宽度 a、厚度 d 的导体中所给出的功率。也就是说,虽然导体在 x 方向伸展到无穷远,但其交流电阻却相当于直流电流集中在纵深方向等于透入深度 d 的范围内的直流电阻。这也是透入深度 d 的另一物理意义。通常 d 很小,所以有时也称 Z 为表面阻抗。

例 5-6 求半径为 a 的圆截面导线单位长度上的交流电阻。假设半径 a 远远大于透入深度 d。

解: 由于 $a \gg d$,所以可把导线看成是厚度无限大、宽度为导线截面周长 $2\pi a$ 的平面导体。因此,由(5-63)式计算得圆导线单位长度上的交流电阻是

$$R = \frac{1}{2\pi a \gamma d}$$

这相当于厚度为 d（$d \ll a$）的圆管导体的直流电阻。同时，圆导线单位长度的直流电阻是

$$R_d = \frac{1}{\gamma \pi a^2}$$

因此，同一根圆导线的交流电阻与直流电阻的比值是

$$\frac{R}{R_d} = \frac{a}{2d}$$

例如，当 $a = 2 \times 10^{-3}\,\text{m}$，$f = 3 \times 10^{8}\,\text{Hz}$，$\gamma = 5.8 \times 10^{7}\,\text{S/m}$ 时，$\frac{R}{R_d} \approx 26.2$。这说明同一根导线的交流电阻比直流电阻大得多。在截面一样的情况下,为减少交流电阻,唯一的办法就是增大导体的表面面积,这就是采用相互绝缘的多股细线的优点。在无线电技术中,通常用它绕制高 Q 值的电感 。

习 题 (5-6)

5-6-1 铜质同轴电缆内导体半径为 $R_1 = 0.4\,\text{cm}$,外导体的内半径为 $R_2 = 1.5\,\text{cm}$，$\gamma = 5.8 \times 10^{7}\,\text{S/m}$,电流频率为 1 MHz，外导体的厚度远大于透入深度。求单位长度内、外导体的交流电阻。

5-6-2 在半径为 1 cm 的铜导线中，通以 50 Hz 及 5000 kHz 的正弦电流时，其交流电阻各为多少($\gamma_{\text{Cu}} = 5.8 \times 10^{7}\,\text{S/m}$)?

5-6-3 在要求导线的交流电阻很小的场合通常使用多股纱包线代替单股线。证明，相同截面积的 N 股纱包线的交流电阻只有单股线的 $\frac{1}{\sqrt{N}}$。

§5－7 邻近效应和电磁屏蔽

本节将介绍时变电磁场中相互靠近的导体之间的邻近效应现象，及抑制措施——电磁屏蔽。

5.7.1 邻近效应

相互靠近的导体通有交变电流时，每一导体不仅处于自身电流产生的电磁场中，同时还处于其它导体中的电流产生的电磁场中。显然，这时各个导体中的电流分布和它单独存在时不一样，会受到邻近别的导体的影响，这种现象称为邻近效应。频率愈高，导体靠得愈近，邻近效应愈显著。邻近效应与集肤效应是共存的，它会使导体的电流分布更不均匀。

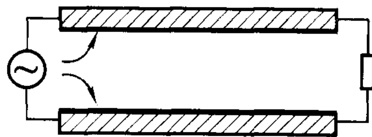


图 5－13 二线传输线中的邻近效应

例如，在二线传输线中，电流就不再对称地分布在导体中，而是比较集中在两导线相对的内侧，如图 5－13 所示。形成这种分布的原因是，电源能量主要通过两线之间的空间以电磁波的形式传送给负载；导线内部的电流密度与空间电磁波分布密切相关；两线相对的内侧处电磁波能量密度大，传入导线的功率大，故电流密度也较大。

例5－7 有一对通以交流电流的汇流排，如图 5－14 (a)所示。已知其中电导率 γ 和磁导率μ_0；两汇流排的厚度、宽度和长度分别为 a、b 和 l，且 $a \ll b \ll l$，板间距离为 d 。分析电流密度的分布。

解： 在 MQS 近似下，与§5－4 类似，容易得到在导体区域内有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_y}{\mathrm{d}x^2} = k^2\dot{H}_y$$

通解是

$$\dot{H}_y = C_1\mathrm{e}^{-kx} + C_2\mathrm{e}^{kx}$$

这里，有近似边界条件：$\dot{H}_y\left(\frac{d}{2}+a\right)=0$ 和 $\dot{H}_y\left(\frac{d}{2}\right)=\frac{\dot{I}}{b}$。将它代入上述通解，确定出待定系数 C_1 和 C_2 。最后，得磁场强度

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{I}}{b\,\mathrm{sh}(ka)}\mathrm{sh}k\left(\frac{d}{2}+a-x\right)$$

和电流密度

$$\dot{J}_z = (\nabla \times \dot{\boldsymbol{H}})_z = -\frac{\dot{I}}{b\ \mathrm{sh}(ka)}\mathrm{ch}k\left(\frac{d}{2} + a - x\right)$$

电流密度的模 $|\dot{J}_z|$ 的分布见图 5-14(b)。容易看出，靠近两板相对的内侧面，电流密度最大，呈现有较强的邻近效应。

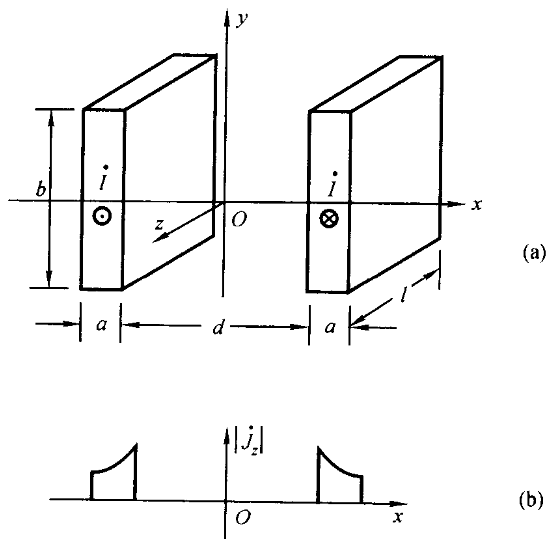


图 5-14 交流汇流排的电流分布

5.7.2 电磁屏蔽

在电磁场工程中，用于减弱由某些源产生的空间某个区域内(不包含这些源)的电磁场的结构，称为电磁屏蔽。它是抑制邻近效应的一种常用措施。在绝大多数情况下，电磁屏蔽由金属(铜、铝、钢)制成。例如在收音机中，以空心的铝壳罩在中周线圈外面，使它不受外界高频电磁场的干扰；电子设备的金属外壳可以使其内部产生的高频电磁场不透出外壳去干扰其它设备。

电磁屏蔽利用了导体内的涡流所产生的电磁场，将对外加电磁场起抵制作用，用作对给定区域进行屏蔽。因此，又称为涡流屏蔽。为了达到有效的屏蔽作用，屏蔽罩的厚度 h 必须接近于屏蔽材料的透入深度的 3~6 倍，即

$$h \approx 2\pi d \tag{5-64}$$

这样，电磁场实际上便不能透过，从而起到了屏蔽作用。例如，当 $f=1$ MHz 时，铝的透入深度为 82 μm 左右，故外界射频电磁场将不影响罩内装置。在中高频时，一般不用铁制屏蔽，因铁磁材料在中高频时损耗较大，发热厉害，对被屏蔽装置有不利影响。

电磁屏蔽的效能，可以用不存在屏蔽体时空间防护区的场强(E_0 或 H_0)与存在屏蔽体时该区的场强(E 或H)的比值来表征，有

$$S=\frac{E}{E_0} \qquad 或\ S=\frac{H}{H_0} \tag{5-65}$$

称 S 为屏蔽系数。

例 5－8 轴向磁场向薄导体圆管内的扩散。

如图 5－15 所示，有一电导率和壁厚都均匀的长直导体圆管。若外激磁电流源在 $t=0$ 时突然在圆管外部空间建立起一均匀轴向磁场 $\boldsymbol{H}=H_o\boldsymbol{e}_z$，这可能是借助于一同轴的螺管线圈电流施加的。求在导体圆管中环行的电流密度及圆管内部的轴向磁场强度。

解: 起初 $t=0_+$ 时，由于导体圆管中感应电流的去磁作用，圆管所围内部空间的磁场 H_i 不会突变，仍保持原值为零。随后 $t>0$ 时，随着感应电流的衰减，场不断地向内部透入，H_i 逐渐增长，最后形成均匀分布，这就是磁扩散过程。在这个过程中，根据连续性条件，有

$$H_i-H_o=K \tag{5-66}$$

式中 K 是薄导体圆管中面电流的线密度，如图 5－15 所示。若薄圆管的厚度记作 Δ，则

$$K=\gamma E\Delta \tag{5-67}$$

在薄导体圆管中取回路 l，如图 5－15 所示，根据电磁感应定律，得

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

将(5－67)式代入上式，并假定薄圆管所围空间内 H_i 处处分布均匀，则得

$$K\oint_l \frac{dl}{\gamma\Delta}=-\mu_0\frac{dH_i}{dt}\pi a^2$$

再将(5－66)式代入上式并整理之，得

$$\tau_m\frac{dH_i}{dt}+H_i=H_o \tag{5-68}$$

式中

$$\tau_m=\frac{1}{2}\mu_0\gamma\Delta a \tag{5-69}$$

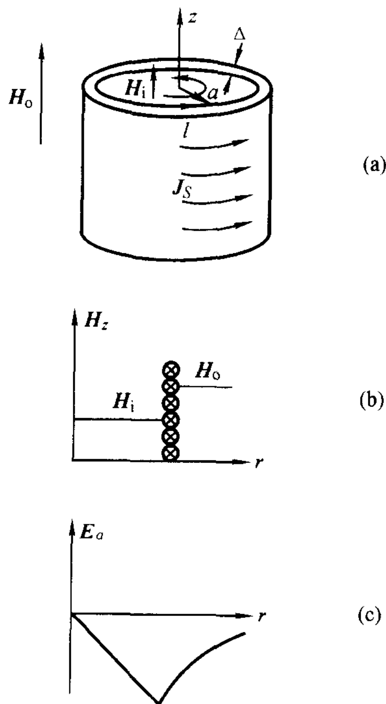


图 5－15 圆柱形导电壳受轴向外磁场 $H_o(t)$的作用

一阶常微分方程(5-68)式就是描述薄导体圆管内部电磁场透入的磁扩散方程，τ_m 称为磁扩散时间。它的一般解为

$$H_i(t) = H_o(1 - e^{-t/\tau_m}) \tag{5-70}$$

和

$$K(t) = -H_o e^{-t/\tau_m} \tag{5-71}$$

磁场和电流的分布分别如图 5-15 (b)和(c)所示。

若外施激励电流源为工频正弦交流，今采用复数分析其稳态。方程(5-68)式成为

$$j\omega\tau_m\dot{H}_i + \dot{H}_i = \dot{H}_o$$

故

$$\dot{H}_i = \frac{1}{1 + j\omega\tau_m}\dot{H}_o \tag{5-72}$$

当 $\omega \gg \dfrac{1}{\tau_m} = \dfrac{2}{\mu_0\gamma\Delta a}$ 时，H_i 必远小于 H_o，可见薄壁导体圆管中感应电流的作用是去磁的。若管内又套有管，则内导体管内的磁场将极弱。

这个例子表明，如在长螺线管内插入一根导电的管子，则轴向磁场将被削弱。屏蔽系数 S 与频率之间的关系曲线如图 5-16 所示。铜管的内半径为 100 mm,厚度分别为 2 mm、3 mm、4 mm和 5 mm。对于这种形式的屏蔽，难于找出一个简单的规律来表达；但对所研究的特定频率，屏蔽厚度等于透入深度时，涡流屏蔽将使磁场减少到原有值的百分之几。

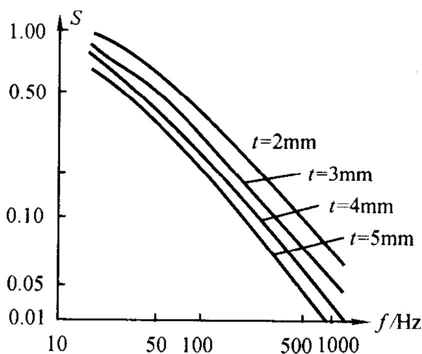


图 5-16 厚度为 t 时铜管的屏蔽系数 S

最后有必要介绍一下屏蔽时的谐振现象。当需要减弱的电磁场的频率接近并等于屏蔽体的某一固有频率时，屏蔽效能急剧降低。由于结构不当造成谐振现象的屏蔽，不仅不能使防护区的场减弱，反而会加强。这是设计电磁屏蔽结构时特别应该注意的。正确选用屏蔽材料、尺寸和结构，将能减弱屏蔽效能的不利作用至允许值。

习 题 (5-7)

5-7-1 长薄壁铜圆管如图 5-15 (a)所示。已知，电导率 $\gamma = 5.8\times10^7$ S/m,壁厚 $\Delta = 1$ mm,管的内径 $a = 4$ cm。(1) 求其磁扩散时间 τ_m;(2) 若外激磁电流为阶跃电流，由

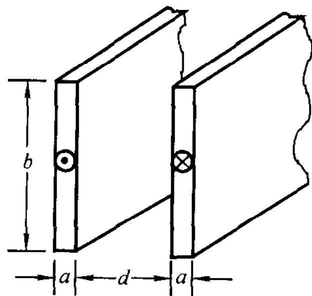
零突变为直流，求阶跃后 τ_m 瞬时 $\boldsymbol{H}_i$ 与 $\boldsymbol{H}_o$ 的比值。

5-7-2　为了得到有效的电磁屏蔽，试计算(1)收音机内中周变压器的铝屏蔽罩的厚度；(2)电源变压器铁屏蔽罩的厚度；(3)若中周变压器用铁而电源变压器用铝作屏蔽是否也可以(铝 $\gamma = 3.72\times10^7$ S/m, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$；铁 $\gamma = 10^7$ S/m, $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 10^4$)？

5-7-3　两条平行的汇流排，截面为矩形，如题 5-7-3 图所示，其中通有大小相等方向相反的交变电流 $\dot{I}$。导线宽 $a = 1$ mm，高 $b = 10$ mm，导线间距离 $d = 2$ mm，导线的电导率 $\gamma = 10^7$ S/m和磁导率 $\mu = 250\mu_0$。电流频率 $f = 50$ Hz。计算

(1) 导线各处的电流密度；

(2) 汇流排单位长度的电阻。



题 5-7-3 图

提　　要

1. 时变电磁场，当忽略 $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ 时，称为电准静态场(EQS)。它的基本方程组(微分形式)为

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} \approx 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

2. 时变电磁场，当忽略 $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 时，称为磁准静态场(MQS)。它的基本方程组(微分形式)为

$$\nabla\times\boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{J}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$$

3. 自由电荷在导体中的弛豫过程是按指数规律随时间衰减的。无限大均匀导体的弛豫时间是 $\tau_e = \frac{\varepsilon}{\gamma}$。在弛豫过程中，导体内的电位分布满足微分方程

$$\nabla^2\varphi = \rho_0 e^{-t/\tau_e}$$

对于无限大均匀导电媒质，电位有积分形式解

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho_0}{R}e^{-t/\tau_e}dV = \varphi_0(x,y,z)e^{-t/\tau_e}$$

同样，自由电荷在导体分界面的积累过程也是按指数规律随时间衰减的。引起过渡过程的原因是分界面上的 $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ 不为零。双层有损介质平板电容器的弛豫时间 $\tau_e = \frac{b\varepsilon_1 + a\varepsilon_2}{b\gamma_1 + a\gamma_2}$。当板上电荷或电压突变的瞬时，两种有损介质中的电压按电容分配；当进入直流稳态后，电压按电阻分配。在低频或工频交流电压作用下，多层有损介质中的电场稳态值应按静电场分析；在直流电压作用下，电场稳态值应按恒定电场分析。

4. 交变电流在良导体中流动时，其内部电流和电磁场的分布表现出显著的集肤效应现象。对于良导体，透入深度

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$$

在高频时，要考虑到电流和电磁场分布不均匀的问题

5. 时变电磁场中的导体内会出现涡流电流流动，当位移电流产生的磁场远小于外加磁场时可按磁准静态场(MQS)处理。

6. 邻近效应是指相互靠近的通有变化电流导体间的相互作用和影响。电磁屏蔽是抑制邻近效应的一种常用措施。它利用了当电磁能进入导体时，随着与表面距离的增大，能量逐渐减少，从而引起电磁场能量逐渐减弱的现象。

电磁屏蔽的屏蔽层的厚度 h 必须接近屏蔽材料透入深度的 3～6 倍，即 $h \approx 2\pi d$。

7. 导体中磁的扩散过程是按指数规律随时间衰减的。长薄导电圆管的扩散时间 $\tau_m = \frac{1}{2}\mu_0\gamma a\Delta$。

思 考 题

5-1 有人想利用铝制菜盒装置一台半导体收音机，行不行？为什么？

5-2 一块金属在均匀恒定磁场中平移，金属中是否会有涡流？若金属块在均匀恒定磁场中旋转，金属中是否会有涡流？

5-3 把一铜片放在磁场中。如果将铜片从磁场中拉出或推入，都会感到有阻力。试说明此阻力的来源。

5-4 X 射线为何可透过金属块？

5-5 用场的观点分析静电屏蔽、磁屏蔽和电磁屏蔽。

5-6 电准静态场是如何定义的？它的特性是什么？准静态条件是什么？

5-7　在时变电磁场中，判别一种媒质是否属于良导体的条件是什么？

5-8　电荷在导电媒质中的弛豫过程中，位移电流是否刚好抵消了传导电流的磁效应？

5-9　何谓透入深度？它是怎样定义的？它与哪些量有关？在良导体情形下的计算公式是怎样的？

5-10　导线的电阻与电感值仅决定于导线的几何形状、尺寸及媒质的参数，而与所加的电压无关，这一结论在时变电磁场中是否仍然适用？为什么？

5-11　何谓集肤效应、邻近效应？

5-12　随着电源频率的提高，以平板型导体(板厚远大于透入深度)为例，其等效电阻、电抗和内电感将作怎样的变化？

5-13　在无限大的均匀导电媒质中，放置一初始值为 Q_0 的点电荷，试求导电媒质中任一时刻的电流密度。

5-14　涡流是怎样产生的？应采取哪些措施来减少电工钢片中的涡流损耗？

5-15　当有 $f_1 = 4\times10^3$ Hz 和 $f_2 = 4\times10^5$ Hz 的两种频率的信号，同时通过厚度为 1 mm 的铜板时，试问在铜板的另一侧能接收到哪些频率的信号(注 $\gamma_{Cu} = 5.8\times10^7$ S/m，$\mu_{Cu} = 4\pi\times10^{-7}$ H/m)

5-16　试分析在高频情况下，为什么导线可以采用空心管状结构？

习　　题

5-1　在无限大均匀导电媒质中，放置一个初始值为 q_0 的点电荷，试问该点电荷的电量如何随时间变化？空间任一点的电流密度和磁场强度是多少？

5-2　(1)长直螺线管中载有随时间变化相当慢的电流 $i = I_0\sin\omega t$。先由安培环路定律求半径为 a 的线圈内产生的磁准静态场的磁感应强度，然后利用法拉弟定律求线圈里面和外面的感应电场强度；

(2) 试论证上述磁准静态的解只在 $\omega\to0$ 的静态场极限情况下，才精确地满足麦克斯方程组。

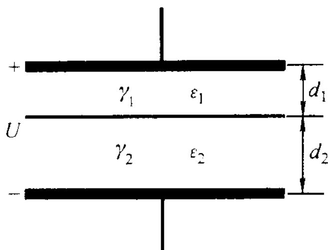
5-3　由两层有损介质组成的平板电容器，如题 5-3 图所示。分析两层介质中的电场强度。忽略感应电场。板间电压分四种情况：

(1) 直流电压，稳态；

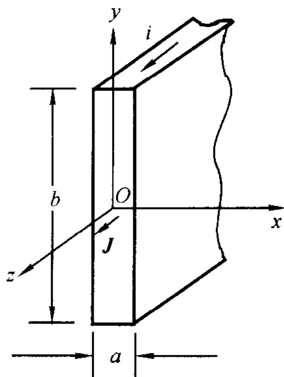
(2) 交流电压，稳态。角频率 $\omega\leqslant\dfrac{\gamma_1}{\varepsilon_1}$ 和 $\omega\leqslant\dfrac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$；

(3) 交流电压，稳态。$\omega\gg\dfrac{\gamma_1}{\varepsilon_1}$ 和 $\omega\gg\dfrac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$

(4) 交流电压，稳态。$\dfrac{\gamma_1}{\varepsilon_1}\ll\omega\ll\dfrac{\gamma_2}{\varepsilon_2}$



题 5－3 图



题 5－4 图

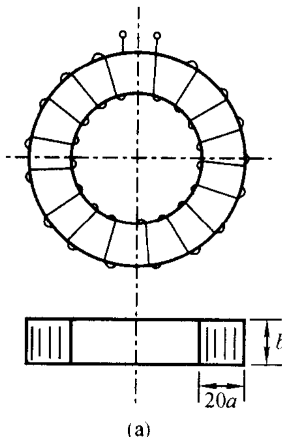
5－4 题 5－4 图示一薄铜板（$b \gg a$），其电导率 $\gamma = 5.6 \times 10^7$ S/m，通有电流 $i = 5\cos 10^5 t$ A。$b = 50$ cm，$a = 1$ cm。求电流密度 J 随 x 变化的曲线。

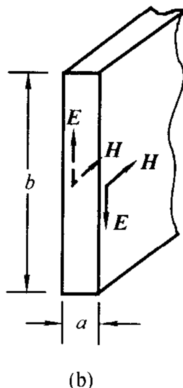
注：因 $b \gg a$，故 $\boldsymbol{H}$ 可视为只有 y 分量。

5－5 今测得在 13.56 MHz 的电磁波照射下，脂肪的相对介电常数 $\varepsilon_r = 20$，电阻率 $\rho = 34.4\ \Omega \cdot$m。试计算其透入深度。

5－6 有一镯环形电感，如题 5－6 图(a)所示。铁心由 0.5 cm 宽的薄片卷成，每片厚度 $a = 0.15$ mm，共 20 层，平均每层圆周长度 $l = 6$ cm，宽度 $b = 0.5$ cm。铁心材料的磁导率 $\mu = 800\mu_0$，电导率 $\gamma = 5 \times 10^6$ S/m。线圈匝数 $N = 60$ 匝。求此铁心线圈在频率为 50 kHz 时的等效阻抗（电阻及电感）。导线的电阻不计。

注：因薄片周长 $l \gg a$，$b \gg a$ 故可当成平板考虑，如题 5－6 图(b)所示。





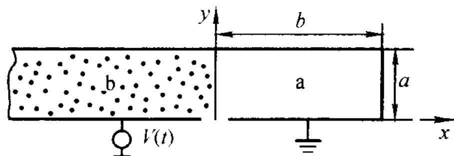
题 5－6 图

5－7 题 5－7 图示系统沿 z 轴向无限长。$x = 0$ 平面左边的平行平板电容器延伸到 $x = -\infty$；上电极向右延伸到 $x = b$ 平面后向下弯曲到 $y = 0$，然后沿 $y = 0$ 向左弯曲到 $x = 0$

平面。该系统的下电极电位为 $V(t)$，上电极接地。区域 a 是自由空间，而 $x=0$ 平面左边的区域 b 是有损介质(介电常数 ε 和电导率 γ)。外施电压 $V(t)$是一量值为 V_0 的阶跃函数。

(a) 电压已加上很长时间，求区域 a 和 b 中的电场和电位分布。

(b) 现在要求 $t>0$ 时的电位 φ，并证明 $t\to\infty$ 的极限情况下，这一结果变成(a)中的结果。



题 5－7 图

5－8　一薄壁方筒，如题 5－8 图所示。其电导率为 γ，磁导率 μ_0，壁厚 Δ，方截面边长为 a，筒长很长。在 $t=0$ 时，由于外加磁通 Φ_m 突减至零，感生一面电流，其面电流的线密度为 K_0。试证 $t>0$ 时 $K_S(t)=K_0 e^{-t/\tau_e}$，这里 $\tau_m=\mu_0\gamma\Delta a/4$。

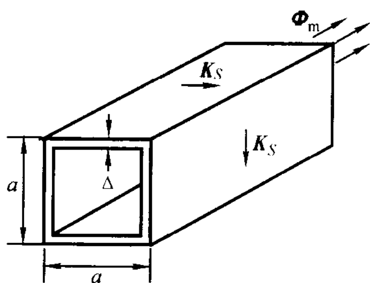
5－9　某高灵敏度仪器必须高度地屏蔽外界电磁场，使外界磁场强度降低到 0.01 A/m 以下。但根据实测结果，该处可能受到的最大干扰磁场强度达 12 A/m。试计算用铝板屏蔽以及 $\mu_r=2\,000$ 的铁板所需的厚度($\gamma_{Al}=35.7\times10^6$ S/m, $\gamma_{Fe}=8.3\times10^6$ S/m)。

5－10　题 5－10 图示出一交流电机铁心上的导线槽，槽内导线为铜，电导率 $\gamma=5.8\times10^7$ S/m。已知 $h=1.5$ cm，$b=0.5$ cm，$\mu_{Fe}=\infty$，$I=100$ A，$f=50$ Hz。求

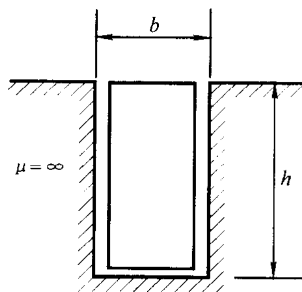
(1) 电流密度；

(2) 单位长度上所消耗的功率；

(3) 单位长度导线的交流内阻抗，交流电阻与直流电阻的比值。



题 5－8 图



题 5－10 图

第六章　平面电磁波的传播

本章从电磁场基本方程组出发，首先导出电磁波的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 所满足的波动方程，然后讨论无界均匀媒质条件下波动方程的解——均匀平面电磁波。重点讨论随时间作正弦变化的情况，并介绍描述正弦波动特性的主要物理量——传播常数和波阻抗。

介绍平面电磁波极化的概念，分析平面电磁波的反射和折射，重点讨论全反射及驻波。

均匀平面电磁波是电磁波的最简单的形态，它的特性及讨论方法都比较简单，但却能表征电磁波重要的和主要的性质。

§6－1　电磁波动方程和平面电磁波

电磁场基本方程组表明，变化的电场和变化的磁场之间存在着耦合，这种耦合以波动的形式存在于空间，即在空间有电磁场的传播。变化电磁场在空间的传播称为电磁波，它是由场源辐射出来的。无线电波、电视信号、雷达波束、X 射线和 γ 射线都是电磁波的例子。研究电磁波在空间的传播规律和特性，就是讨论由电磁场基本方程组导出的电磁波动方程在给定条件下的解。

这一节将由电磁场基本方程组导出电磁波动方程，并讨论平面电磁波的基本特性。

6.1.1　电磁波动方程

由第四章可知，已发射出去的电磁波，即使激发它的源消失后仍将继续存在并向前传播。现在关心的是这种已脱离场源的波在无源空间的传播规律和特点。

在无源空间中，传导电流和自由电荷都为零，即 $\boldsymbol{J}=0$、$\rho=0$。再假设无源空间中的媒质是各向同性、线性和均匀的，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}=\gamma\boldsymbol{E}$，则由电磁场基本方程组(4－20)式～(4－23)式，得

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\gamma\boldsymbol{E}+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (6-1)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad (6-2)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{6-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{6-4}$$

取(6－1)式的旋度，并利用(6－2)式，得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = -\gamma\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

利用矢量恒等式$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H}$，并考虑(6－3)式，上式变成

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{6-5}$$

类似地，可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6-6}$$

(6－5)式和(6－6)式是无源空间中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的方程，称为电磁波动方程。它们是研究电磁波问题的基础。

6.1.2　平面电磁波

在电磁波的传播过程中，对应于每一时刻 t，空间电磁场中电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{H}$ 具有相同相位的点构成等相位面，或波阵面。等相位面为平面的电磁波称为平面电磁波。如果在平面电磁波的等相位面的每一点上，电场 $\boldsymbol{E}$ 均相同，磁场 $\boldsymbol{H}$ 也均相同，则这样的电磁波称为均匀平面电磁波。例如，远离单元偶极子处的电磁波在小范围内就可近似地看成均匀平面电磁波。实际存在的各种较复杂的电磁波都可看成由许多均匀平面电磁波迭加而成，所以分析它有着重要的意义。

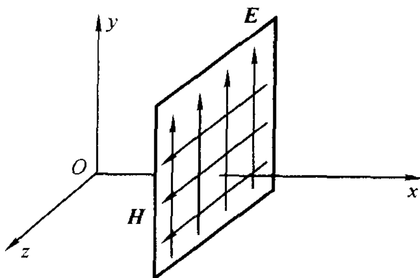


图6－1　向 x 方向传播的均匀平面波

假设均匀平面电磁波的波阵面与 yOz 平面平行，如图 6－1 所示。根据定义，场强 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{H}$）值在波阵面上处处相等，即与坐标 y 和 z 无关。因此 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 除了与时间 t 有关外，仅与空间坐标 x 有关，有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, t) \quad \text{和} \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(x, t)$$

这时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程(6－5)式和(6－6)式简化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{6-7}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} - \mu\gamma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6-8}$$

这是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 关于 x 的一维波动方程。

把 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,t)$和 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(x,t)$分别代入方程(6-1)式~(6-4)式，并在直角坐标系中展开，可得下列方程组

$$\left.\begin{array}{lll}\gamma E_x+\varepsilon\dfrac{\partial E_x}{\partial t}=0, & \dfrac{\partial H_z}{\partial x}=-\gamma E_y-\varepsilon\dfrac{\partial E_y}{\partial t}, & \dfrac{\partial H_y}{\partial x}=\gamma E_z+\varepsilon\dfrac{\partial E_z}{\partial t}\\ \mu\dfrac{\partial H_x}{\partial t}=0, & \dfrac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\dfrac{\partial H_z}{\partial t}, & \dfrac{\partial E_z}{\partial x}=+\mu\dfrac{\partial H_y}{\partial t}\end{array}\right\} \tag{6-9}$$

对此作如下讨论：

(1) 均匀平面电磁波是一横电磁波。由(6-9)式可以看出，H_x 是与时间无关的恒定分量。在波动问题中，常量没有意义，故可取 $H_x=0$，而 $E_x=E_{x0}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$，考虑到一般情况下 $\gamma\gg\varepsilon$，E_x 随时间按指数规律衰减得很快。因此，通常可认为 E_x 为零。$E_x=0$ 和 $H_x=0$ 表明，当取 x 轴为传播方向时，均匀平面电磁波中的电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 都没有和波传播方向 x 相平行的分量，它们都和波传播方向相垂直，即对传播方向来说它们是横向的，这样的电磁波称为横电磁波，或 TEM 波。

(2) 电磁波的电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向、磁场 $\boldsymbol{H}$ 的方向和波的传播方向三者相互垂直，且满足右手螺旋关系。由(6-9)式看出，若电场 $\boldsymbol{E}$ 只有分量 E_y，则磁场仅有分量 H_z；若电场 $\boldsymbol{E}$ 只有分量 E_z，则磁场仅有分量 H_y。这表明，均匀平面电磁波的电场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不仅都和波传播方向相垂直，它们两者也是相垂直的。

(3) 分量 E_y 和 H_z 构成一组平面波；分量 E_z 和 H_y 构成另一组平面波。这两组分量波彼此独立，但电磁波中的合成场强 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 却分别由这两组分量波的有关场强构成。在后面的讨论中，只分析 E_y 和 H_z 构成的一组平面波，以揭示均匀平面波的传播特性。

对于由分量 E_y 和 H_z 构成的平面电磁波，$\boldsymbol{E}=E_y(x,t)\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{H}=H_z(x,t)\boldsymbol{e}_z$，则一维波动方程(6-7)式和(6-8)式简化为

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}-\mu\gamma\frac{\partial H_z}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=0 \tag{6-10}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}-\mu\gamma\frac{\partial E_y}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0 \tag{6-11}$$

习 题 (6-1)

6-1-1 导出等相面为 xOy 平面的均匀平面波满足的一维波动方程。

§6-2 理想介质中的均匀平面电磁波

理想介质是指电导率 $\gamma=0$ 的媒质。这一节将讨论无限大理想介质中的均匀平面电磁波。

6.2.1 一维波动方程的解及其物理意义

对于理想介质，由于 $\gamma=0$，故一维波动方程(6-10)式和(6-11)式简化为

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}=0 \tag{6-12}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}=0 \tag{6-13}$$

这两个一维波动方程的解分别为

$$E_y(x,t)=E_y^+(x,t)+E_y^-(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{v}\right) \tag{6-14}$$

$$H_z(x,t)=H_z^+(x,t)+H_z^-(x,t)=g_1\left(t-\frac{x}{v}\right)+g_2\left(t+\frac{x}{v}\right) \tag{6-15}$$

式中
$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

现在讨论一下(6-14)式和(6-15)式的物理意义：

(1) $E_y^+(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$和$H_z^+(x,t)=g_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$分别是沿$(+x)$方向前进的波的电场分量和磁场分量，称为入射波；而 $E_y^-(x,t)=f_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$和$H_z^-(x,t)=g_2\left(t+\frac{x}{v}\right)$则分别是沿$(-x)$方向前进的波的电场分量和磁场分量，称为反射波。函数 f_1、f_2、g_1 和 g_2 的具体形式与产生该波的激励方式有关。

(2) 理想介质中均匀平面波的传播速度 v 是一常数

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{6-16}$$

它仅与媒质的参数 μ 和 ε 有关。在自由空间中，$v=c=3\times10^8\ \mathrm{m/s}$，理想介质中波的传播速度还可以表示为

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{n} \tag{6-17}$$

式中 n 称为介质的折射率。可见电磁波在理想介质中的传播速度小于在自由空间中的传播速度。

(3) 把 $E_y^+(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$和$H_z^+(x,t)=g_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$代入(6-9)式中的

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}$$

有

$$\frac{\partial H_z^+}{\partial t}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_y^+}{\partial x}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}f'_1\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

将上式对时间积分，并略去表示恒定分量的积分常数，可得

$$H_z^+(x,t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y^+(x,t) \tag{6-18}$$

同理，可以求得

$$H_z^-(x,t)=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}f_1\left(t+\frac{x}{v}\right)=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y^-(x,t) \tag{6-19}$$

(6-18)式和(6-19)式分别反映了入射波和反射波中电场与磁场间的关系。电场和磁场之间满足下列关系

$$\frac{E_y^+(x,t)}{H_z^+(x,t)}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=Z_0,\qquad \frac{E_y^-(x,t)}{H_z^-(x,t)}=-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=-Z_0 \tag{6-20}$$

式中，$Z_0\left(=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right)$称为理想介质的波阻抗，单位为 Ω。

(4) 对于入射波来说，空间任意点在每一瞬时的电场能量密度和磁场能量密度相等，即

$$w'_e=\frac{\varepsilon}{2}[E_y^+]^2=\frac{\mu}{2}[H_z^+]^2=w'_m \tag{6-21}$$

因而总电磁能量密度为

$$w'=w'_e+w'_m=\varepsilon[E_y^+]^2=\mu[H_z^+]^2 \tag{6-22}$$

而坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^+(x,t)&=E_y^+(x,t)\boldsymbol{e}_y\times H_z^+(x,t)\boldsymbol{e}_z=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[H_z^+]^2\boldsymbol{e}_x\\&=vw'\boldsymbol{e}_x\end{aligned} \tag{6-23}$$

(6-23)式表明，在理想介质中电磁波能量流动的方向与波传播的方向一致。又因坡印亭矢量的值表示单位时间内穿过单位面积的电磁能量，应等于电磁能量密度 w' 和能量流动速度 v_e 的乘积，即

$$\boldsymbol{S}^+(x,t)=v_e w'\boldsymbol{e}_x \tag{6-24}$$

对照(6-23)式和(6-24)式，得

$$v_e=v \tag{6-25}$$

这表明，入射波中电磁能量以与波传播速度 v 相同的速度沿波前进方向流动。

同理，对于反射波来说，也有以上类似的结论。

6.2.2 理想介质中的正弦均匀平面波

这里考虑工程中最常见的场量随时间作正弦变化的情况。这时电磁波的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 可用复数形式表示，与(6－12)式和(6－13)式所表示的波动方程相应的复数表达式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_z}{\mathrm{d}x^2}-(\mathrm{j}\omega)^2\mu\varepsilon\dot{H}_z=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_y}{\mathrm{d}x^2}-(\mathrm{j}\omega)^2\mu\varepsilon\dot{E}_y=0$$

这里的 $\dot{H}_z$ 和 $\dot{E}_y$ 仅是 x 的函数,即 $\dot{H}_z(x)$ 和 $\dot{E}_y(x)$。令 $k^2=(\mathrm{j}\omega)^2\mu\varepsilon$ 或 $k=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$,上面两方程可改写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_z}{\mathrm{d}x^2}-k^2\dot{H}_z=0 \tag{6-26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_y}{\mathrm{d}x^2}-k^2\dot{E}_y=0 \tag{6-27}$$

式中，$k\,(=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon})$称为波传播常数，而 $\beta\,(=\omega\sqrt{\mu\varepsilon})$称为相位常数。

方程(6－26)式和(6－27)式是两个二阶的常微分方程，它们的通解为

$$\dot{E}_y(x)=\dot{E}_y^+\mathrm{e}^{-kx}+\dot{E}_y^-\mathrm{e}^{kx} \tag{6-28}$$

$$\dot{H}_z(x)=\dot{H}_z^+\mathrm{e}^{-kx}+\dot{H}_z^-\mathrm{e}^{kx} \tag{6-29}$$

其中 $\dot{E}_y^+$、$\dot{E}_y^-$、$\dot{H}_z^+$ 和 $\dot{H}_z^-$ 都是复常数。它们的大小和相位由场源和边界的具体情况决定。上列两式中的第一项表示入射波；第二项表示反射波。在无限大的均匀介质中，不存在反射波，故有

$$\dot{E}_y(x)=\dot{E}_y^+\mathrm{e}^{-kx}=\dot{E}_y^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{6-30}$$

$$\dot{H}_z(x)=\dot{H}_z^+\mathrm{e}^{-kx}=\dot{H}_z^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x} \tag{6-31}$$

与它们相应的瞬时表达式分别为

$$E_y(x,t)=\sqrt{2}E_y^+\cos(\omega t-\beta x+\phi_E) \tag{6-32}$$

$$H_z(x,t)=\sqrt{2}H_z^+\cos(\omega t-\beta x+\phi_H) \tag{6-33}$$

这就是无限大的理想介质中均匀平面波的正弦稳态解。由上两式可见，电场和

磁场既是时间的周期函数，又是空间坐标的周期函数。

由(6-20)式，可得

$$\frac{E_y(x,t)}{H_z(x,t)}=\frac{\sqrt{2}E_y^+\cos(\omega t-\beta x+\phi_E)}{\sqrt{2}H_z^+\cos(\omega t-\beta x+\phi_H)}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=Z_0 \qquad (6-34)$$

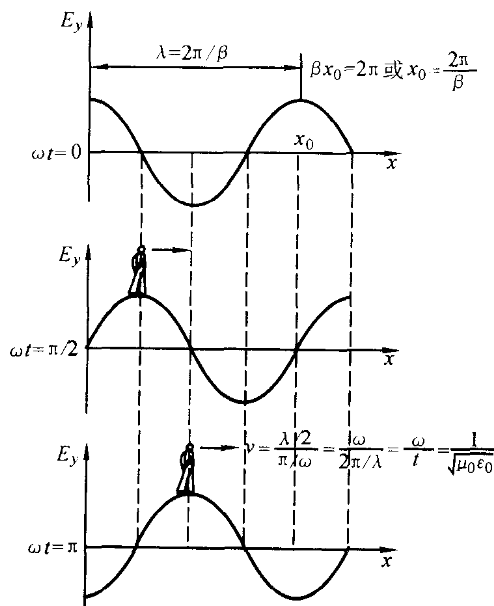


图 6-2 E_y 在几个不同时刻的图形

上式表明，理想介质中均匀平面波的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在时间上同相，即 $\phi_E=\phi_H=\phi$。其振幅之比为实数

$$\frac{E_y^+}{H_z^+}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=Z_0 \qquad (6-35)$$

现在研究(6-32)式和(6-33)式中相位因子$(\omega t-\beta x+\phi)$的物理意义。为不失一般性，且方便起见，可取初相位角 $\phi=0$。即相位因子为$(\omega t-\beta x)$。在时刻 $t=0$，相位因子是$(-\beta x)$，$x=0$ 处的相位为零，即在 $x=0$ 的平面上电场和磁场都处在峰值。在另一时刻 t，相位因子变为$(\omega t-\beta x)$，波峰平面移至$(\omega t-\beta x)=0$ 处，即移至 $x_0=\frac{\omega}{\beta}t$ 处。因此 $\cos(\omega t-\beta x)$代表一沿 $+x$ 方向传播的平面波。图 6-2 给出了(6-32)式在几个不同时刻的图形，可见波上一固定点，即恒定相位点(即$(\omega t-\beta x)$为恒定相位值)以速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (6-36)$$

沿 $+x$ 方向前进。称 v 为电磁波的相位传播速度，又称相速。在无限大理想介质中，相速和波速相等，且与频率无关。

同理可知，$\cos(\omega t+\beta x)$代表一个以速度 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$沿$(-x)$方向传播的平面波。

在§4-5中已定义波长为正弦电磁波在一个周期内前进的距离并用 λ 表示之，即

$$\lambda = vT = v/f$$

或

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{6-37}$$

所以波长 λ 又等于在波传播方向上相位改变 2π 时的两点间的距离。

图6-3表示正弦均匀平面波在理想介质中的传播情况，在 x 等于常数的平面上，各点的场量不仅相位相等而且量值也相等，所以均匀平面波的等相面和等幅面是一致的。在理想介质中，电磁波无衰减地传播，传播的均匀平面波是等振幅波。

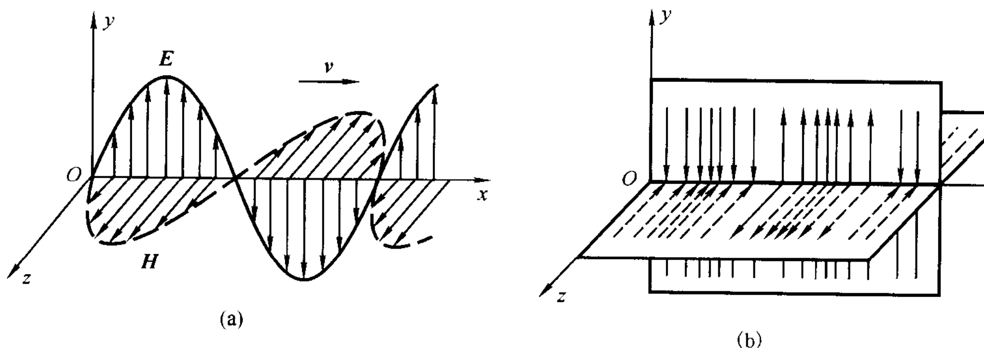


图6-3 向 x 方向传播的正弦均匀平面波

例6-1 已知自由空间中电磁波的电场强度表达式 $\boldsymbol{E}=50\cos(6\pi\times10^{8}t-\beta x)\boldsymbol{e}_y$ V/m。(1)试问此波是否是均匀平面波？求出该波的频率 f、波长 λ、波速 v、相位常数 β 和波传播方向，并写出磁场强度的表达式 $\boldsymbol{H}$。(2)若在 $x=x_0$ 处水平放置一半径 $R=2.5$ m 的圆环，求垂直穿过圆环的平均电磁功率。

解：(1)从电场强度的表达式 $\boldsymbol{E}=50\cos(6\pi\times10^{8}t-\beta x)\boldsymbol{e}_y$ 看出，该波的传播方向为$(+x)$方向，电场垂直于波的传播方向，且在与 x 轴垂直的平面上各点$\boldsymbol{E}$ 的大小相等，故此波是均匀平面波。其各参数是

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{6\pi\times10^{8}}{2\pi}=3\times10^{8}\ \text{Hz}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^{8}\ \text{m/s}$$

$$\lambda=\frac{v}{f}=1\ \text{m}$$

$$\beta=\frac{2\pi}{\lambda}=2\pi=6.28\ \text{rad/m}$$

因为自由空间的波阻抗 $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\ \Omega$，所以磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的表达式为

$$\boldsymbol{H}=\frac{50}{Z_0}\cos(6\pi\times10^{8}t-\beta x)\,\boldsymbol{e}_z$$

$$=\frac{50}{377}\cos(6\pi\times10^{8}t-\beta x)\,\boldsymbol{e}_z\ \text{A/m}$$

(2) 坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 的平均值为

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\text{av}}=\text{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^{*}]=EH\boldsymbol{e}_x$$

$$=\frac{1250}{377}\boldsymbol{e}_x\ \text{W/m}^2$$

则穿过圆环的平均功率为

$$P=\int_A\tilde{\boldsymbol{S}}_{\text{av}}\cdot\text{d}\boldsymbol{A}$$

$$=\frac{1250}{377}\times\pi R^2=65.1\ \text{W}$$

例 6-2 一频率为 100 MHz 的正弦均匀平面波，$\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{e}_y$，在 $\varepsilon_r=4$，$\mu_r=1$ 的理想介质中朝($+x$)方向传播。当 $t=0$，$x=1/8$ m 时，电场 $\boldsymbol{E}$ 的最大值为 $+10^{-4}$ V/m，(1)求波长、相速和相位常数；(2)写出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时表达式；(3)求出 $t=10^{-8}$ s 时，$\boldsymbol{E}$ 为最大正值的位置。

解：(1)

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}=\frac{c}{2}=1.5\times10^{8}\ \text{m/s}$$

$$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}=\frac{2\pi\times10^{8}}{3\times10^{8}}\sqrt{4}=\frac{4\pi}{3}\ \text{rad/m}$$

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{3}{2}\ \text{m}$$

(2) 电场 $\boldsymbol{E}$ 的瞬时表达式为 $\boldsymbol{E}(x,t)=E_{\text{m}}\cos(\omega t-\beta x+\phi)\boldsymbol{e}_y$

根据已知条件，当 $t=0$，$x=1/8$ m 时

$$E_m = 10^{-4}$$

所以
$$-\frac{4\pi}{3} \times \frac{1}{8} + \phi = 0$$

$$\phi = \frac{\pi}{6}$$

因此
$$\boldsymbol{E}(x,t) = 10^{-4}\cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{e}_y \ \text{V/m}$$

因为
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 60\pi\ \Omega$$

所以
$$\boldsymbol{H}(x,t) = \frac{10^{-4}}{60\pi}\cos\left(2\pi \times 10^8 t - \frac{4\pi}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{e}_z \ \text{A/m}$$

(3) 当 $t=10^{-8}$ s 时，为使 $\boldsymbol{E}$ 为最大正值，应有

$$\omega t - \beta x + \phi = 2\pi \times 10^8 \times 10^{-8} - \frac{4\pi}{3}x + \frac{\pi}{6} = \pm 2n\pi$$

解之得 $\boldsymbol{E}$ 的最大正值的位置在

$$x = \frac{13}{8} \pm \frac{3}{2}n = \frac{13}{8} \pm n\lambda \ (n = 0,1,2,\cdots)$$

例 6-3 在微波炉外面附近的自由空间某点测得泄漏电场等于 1.0 V/m，试问该点的平均电磁功率密度是多少？该电磁辐射对于一个站在此处的人的健康有危险吗？

解：把微波炉泄漏的电磁辐射近似看作是正弦均匀平面电磁波，它携带的平均电磁功率密度为

$$|\tilde{\boldsymbol{S}}_{av}| = EH = \frac{1}{377} = 2.65 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2$$

根据美国国家标准，人暴露在微波下的限制量为 10^{-2} W/m^2 不超过 6 分钟；我国的暂行标准规定每 8 小时连续照射，不超过 38×10^{-3} W/m^2。可见，该微波炉的泄漏电场对人体的健康是安全的。

习 题 (6-2)

6-2-1 试证明
$$E_y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$
$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]$$
满足电磁场基本方程组。

6-2-2 已知自由空间中均匀平面波的电场表达式为
$$\boldsymbol{E}(x,t) = [100\sin(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_z + 200\cos(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_y]\ \text{V/m}$$

求该波的磁场 $\boldsymbol{H}$ 及坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$。

6-2-3 已知自由空间中电磁场的电场分量表达式为 $\boldsymbol{E} = 37.7\cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi z)\boldsymbol{e}_y$ V/m。这是一种什么性质的场？试求出其频率、波长、速度、相位常数、传播方向以及 $\boldsymbol{H}$ 的表达式。

6-2-4 某电台发射 600 kHz 的电磁波，在离电台足够远处可以认为是平面波。设在某一点 a，某瞬间的电场强度为 10×10^{-3} V/m，求该点瞬间的磁场强度。若沿电磁波的传播方向前行 100 m，到达另一点 b，问该点要迟多少时间，才具有此 10×10^{-3} V/m 的电场。

§6-3 导电媒质中的均匀平面电磁波

这一节将讨论导电媒质中的均匀平面电磁波。导电媒质与理想介质的区别在于它的电导率 $\gamma\neq0$。只要有电磁波存在，就必然伴随着出现传导电流 $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$。这样就带来了不同于理想介质中的电磁波传播特性。这里只讨论单频正弦均匀平面波在导电媒质中的传播特性。

6.3.1 导电媒质中正弦均匀平面波的传播特性

设导电媒质是各向同性、线性和均匀的，即 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E}$，那末，对于正弦均匀平面电磁波来说，与(6-10)式和(6-11)式所表示的波动方程相应的复数表达式为

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_z}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{H}_z - (\mathrm{j}\omega)^2\mu\varepsilon\dot{H}_z = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_y}{\mathrm{d}x^2} - \mathrm{j}\omega\mu\gamma\dot{E}_y - (\mathrm{j}\omega)^2\mu\varepsilon\dot{E}_y = 0$$

若取 $k^2 = \mathrm{j}\omega\mu\gamma + (\mathrm{j}\omega)^2\mu\varepsilon$ 或 $k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}\right)}$，则上面两个方程组可改写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_z}{\mathrm{d}x^2} - k^2\dot{H}_z = 0 \tag{6-38}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}_y}{\mathrm{d}x^2} - k^2\dot{E}_y = 0 \tag{6-39}$$

式中 k 称为导电媒质中的波传播常数。如果令

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega} \tag{6-40}$$

则有

$$k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \tag{6-41}$$

这里 ε'称为导电媒质的等效介电常数。显然，导电媒质中的波传播常数 k 与理想介质中的波传播常数k 具有相似的形式，两者波动方程的复数表达式也具有相似的形式，只是介电常数 ε 以等效介电常数ε'代替。这样，如若将理想介质中正弦均匀平面电磁波的各公式中的 ε 用ε'代换，则得出导电媒质中正弦均匀平面电磁波的各相应表达式。

由(6－41)式知，在导电媒质中波传播常数 k 是一复数，可以表示为

$$k = \alpha + j\beta \tag{6-42}$$

式中 α 和β 均为常数。将(6－42)式代入(6－30)式和(6－31)式，得电场和磁场的瞬时形式解为

$$E_y(x,t) = \sqrt{2}E_y^+ e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x + \phi_E) \tag{6-43}$$

$$H_z(x,t) = \sqrt{2}H_z^+ e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x + \phi_H) \tag{6-44}$$

下面分析导电媒质中正弦均匀平面电磁波的特点：

(1) 由瞬时解(6－43)式和(6－44)式可见，在某一时刻 t，电场和磁场的振幅沿波传播方向($+x$)按指数规律衰减，这是与理想介质根本不同的；同时，相位依次落后，因此，导电媒质中是一个随着波沿传播方向($+x$)推进而不断衰减的平面电磁波，如图 6－4 所示。

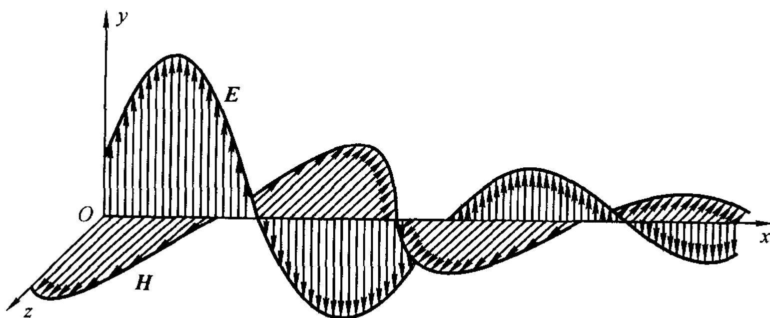


图 6－4　导电媒质中正弦均匀平面电磁波的传播

在导电媒质中电磁波衰减的快慢取决于 α 的大小，因此称 α 为衰减常数，单位为 Np/m (奈伯/米)。波在传播过程中相位改变的快慢则由相位常数 β 决定。

(2) 由(6－41)式和(6－42)式，容易得到

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right]} \tag{6-45}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]} \tag{6-46}$$

因此，导电媒质中波的相速为

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right]}} \tag{6-47}$$

这表明，在导电媒质中波的相速小于在理想介质中波的相速；另外，相速不仅与媒质的参数 μ、ε 和 γ 有关，而且还与频率 f 有关，即在同一媒质中，不同频率的波的传播速度及波长是不同的，它们是频率的函数，这种现象称为色散，相应的媒质称为色散媒质。因此，导电媒质是色散媒质，理想介质是非色散媒质。色散会引起信号传递的失真，所以在实际中对色散现象应给予足够的认识。

（3）根据波阻抗的定义，导电媒质的波阻抗求得为

$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon+\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega}}}=|Z_0|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{6-48}$$

可见波阻抗是一复数。它表明电场、磁场在空间同一位置存在着相位差。在时间上磁场 H 比电场 E 落后的相位为 φ。即在(6-43)式和(6-44)式中，有 $\phi_E-\phi_H=\varphi$。

（4）坡印亭矢量的平均值为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{av}}&=\mathrm{Re}\left[\dot{E}\times\dot{H}^*\right]\\&=E_y^+H_z^+\mathrm{e}^{-2\alpha x}\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x\\&=\frac{1}{|Z_0|}(E_y^+)^2\mathrm{e}^{-2\alpha x}\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x\end{aligned} \tag{6-49}$$

此式表明，由于 $\alpha\neq0$，波在前进过程中还伴随着能量的不断损耗，这表现为场量振幅的减小，损耗的原因是由于传导电流所消耗的焦耳热。

6.3.2　低损耗介质中的波

上一节中讨论的理想介质只是一种理想的情况，实际介质都是有损耗的，即有一定的电导率值。例如，土壤、海水、石墨等都是常见的有损耗介质。

上面有关导电媒质中正弦均匀平面电磁波的分析方法和公式，对有损耗介质中的均匀平面电磁波传播特性的分析也是适用的。

对于有损耗介质，如果满足条件 $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\ll1$，则称为低损耗介质。或者说，低损耗介质是一种良好的但电导率不为零的非理想绝缘材料。在 $\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\ll1$ 这一条件下，可近似认为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2$$

并代入(6-45)式和(6-46)式中，得衰减常数

$$\alpha\approx\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\tag{6-50}$$

和相位常数

$$\beta\approx\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\tag{6-51}$$

及由(6-48)式，得波阻抗

$$Z_0\approx\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\tag{6-52}$$

以上各式说明，低损耗介质的相位常数和波阻抗近似等于理想介质中的相应值，不同的只是电磁波有衰减。但衰减常数 α 是一正常数。在这样的介质中，位移电流代表了电流的主要特征。

6.3.3　良导体中的波

良导体是指$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\gg 1$ 的导电媒质。这时，可以近似认为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\approx\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}$$

故在良导体中，有

$$k\approx\alpha+\mathrm{j}\beta=(1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}\tag{6-53}$$

$$Z_0\approx\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+\mathrm{j})=\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\angle 45^\circ\tag{6-54}$$

以及相速和波长分别为

$$v\approx\frac{\omega}{\beta}=\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}\tag{6-55}$$

$$\lambda\approx\frac{2\pi}{\beta}=2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}\tag{6-56}$$

分析以上各式可见：(1)高频电磁波在良导体中的衰减常数 α 变得非常大。例如 $f=3$ MHz 时，在铜中 $\alpha\approx2.62\times10^4$ Np/m。因此，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的振幅都发生急剧衰减，以致电磁波无法进入良导体深处，仅存在于其表面附近，集肤效应非常显著。正弦均匀平面电磁波在良导体中的透入深度 $d=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$；(2)电场与磁场不同相。波阻抗的幅角为 45°，这说明磁场的相位滞后于电场 45°；(3)由于 γ 很大，波阻抗的值很小，故电场能密度远小于磁场

能密度$\left(\dfrac{\omega'_e}{\omega'_m}=\dfrac{\omega\varepsilon}{\gamma}\ll 1\right)$。这说明良导体中的电磁波以磁场为主，传导电流是电流的主要成分；(4)良导体中电磁波的相速 v 和波长 λ 都较小。

对于理想导体，由于它的电导率 $\gamma\to\infty$，故理想导体的透入深度 d 为零。就实际用途而言，普通的金属如铜、铝、金、银等，在求解电磁波问题时均可视为理想导体。

例 6-4　一均匀平面电磁波从海水表面($x=0$)向海水中($+x$ 方向)传播，已知 $E=100\cos(10^7\pi t)\boldsymbol{e}_y$，海水的 $\varepsilon_r=80$，$\mu_r=1$，$\gamma=4$ S/m，(1)求衰减常数、相位常数、波阻抗、相位速度、波长、透入深度；(2)求 $\boldsymbol{E}$ 的振幅衰减至表面值的 1% 时，波传播的距离；(3)求 $x=0.8$ m 时，$\boldsymbol{E}(x,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(x,t)$ 的表达式。

解：根据题意，有

$$\omega = 10^7\pi \text{ rad/s} \qquad f=\frac{\omega}{2\pi}=5\times 10^6 \text{ Hz}$$

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{4}{10^7\pi\times\left(\dfrac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\right)\times 80}=180\gg 1$$

因此海水可视作良导体

(1) 衰减常数　$\alpha=\sqrt{\pi f\mu\gamma}=\sqrt{5\pi\times 10^6\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}=8.89$ Np/m

相位常数　$\beta=\alpha=8.89$ rad/m

波阻抗　$Z_0=\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{\gamma}}\angle 45^\circ=\sqrt{\dfrac{10^7\pi\times 4\pi\times 10^{-7}}{4}}=\pi\angle 45^\circ\ \Omega$

相位速度　$v=\dfrac{\omega}{\beta}=\dfrac{10^7\pi}{8.89}=3.53\times 10^6$ m/s

波长　$\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}=\dfrac{2\pi}{8.89}=0.707$ m

透入深度　$d=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{8.89}=0.112$ m

(2) 设 x_1 为波振幅衰减至 1% 时所移动的距离

$$e^{-\alpha x_1}=0.01 \qquad x_1=\frac{1}{\alpha}\ln 100=\frac{4.605}{8.89}=0.518 \text{ m}$$

(3) E 的瞬时表达式为

$$E(x,t)=100e^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x)\boldsymbol{e}_y$$

在 $x=0.8$ m 时

$$\boldsymbol{E}(0.8,t)=100e^{-0.8\alpha}\cos(\omega t-0.8\beta)\boldsymbol{e}_y=0.082\cos(10^7\pi t-7.11)\boldsymbol{e}_y \text{ V/m}$$

所以

$$\boldsymbol{H}(0.8,t) = \frac{100\mathrm{e}^{-0.8\alpha}}{|Z_0|}\cos\left(\omega t - 0.8\beta - \frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{e}_z$$
$$= 0.026\cos(10^7\pi t - 1.61)\,\boldsymbol{e}_z\ \mathrm{A/m}$$

可见 5 MHz 平面电磁波在海水中衰减很快，以致在离开波源很短距离处，波的强度就变得非常弱了。因此，海水中的无线电通讯必须使用低频无线电波。但即使在低频情况下海底的远距离无线电通讯仍然很困难。如 $f=50$ Hz 时，可计算得 $d=35.6$ m。这就给潜水艇之间的无线电通讯带来了很大困难，不能直接利用海水中的直接波进行无线电通讯，必须将它们的收发天线移至海水表面附近，利用沿海水表面传播的表面波作传输媒介。

例 6－5　求半径为 a 的圆柱导线单位长度的交流电阻(设透入深度 $d\ll a$)。

解：由于 $d\ll a$，导线中的电磁场可以看成是一平面电磁波。设导线中的电场和磁场为

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{E}_0{}^{-k(a-\rho)}\boldsymbol{e}_z$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{\dot{E}_0}{Z_0}\mathrm{e}^{-k(a-\rho)}\boldsymbol{e}_\phi$$

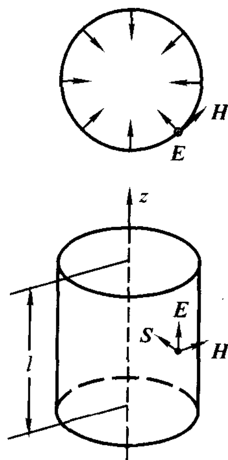


图 6－5　圆柱导线

进入导体表面的坡印亭矢量的有功分量为

$$S_{\mathrm{av}} = |\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*)|_{\rho=a} = \frac{E_0^2}{|Z_0|}\cos 45^\circ(-\boldsymbol{e}_\rho)$$

因而单位长度导线消耗的有功功率

$$P = S_{\mathrm{av}}\times 2\pi a\times 1 = \frac{2\pi a E_0^2}{|Z_0|}\cos 45^\circ$$

导线中的电流密度为

$$\dot{\boldsymbol{J}} = \gamma\dot{\boldsymbol{E}} = \gamma\dot{E}_0\mathrm{e}^{-k(a-\rho)}\boldsymbol{e}_z$$

导线中的总电流

$$\dot{I} = \int\dot{\boldsymbol{J}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^a\gamma\dot{E}_0\mathrm{e}^{-k(a-\rho)}2\pi\rho\mathrm{d}\rho = 2\pi\gamma\dot{E}_0\left(\frac{a}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{\mathrm{e}^{-ka}}{k^2}\right)$$

略去 k 的高次项

$$\dot{I}\approx 2\pi\gamma\dot{E}_0\frac{a}{k}$$

$$I^2\approx(2\pi\gamma E_0)^2\frac{a^2}{|k|^2}$$

交流电阻

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{2\pi a E_0^2}{|Z_0|}\cos 45^\circ\frac{|k|^2}{(2\pi\gamma E_0 a)^2} = \frac{1}{2\pi a\gamma d}$$

单位长度导线的直流电阻为　$R_d=\frac{1}{\pi a^2\gamma}$

高频电阻与直流电阻的比值为　$\frac{R}{R_d}=\frac{a}{2d}$

如取 $a=2$ mm，$f=3\times10^6$ Hz，$\gamma=5.8\times10^7$ S/m 时，比值为 26.21。频率升高，上述比值更大。工程上一般为减小高频电阻，即集肤效应的影响，采用增大导线表面积的方法，如用互相绝缘的多股线代替单根导线及在导线表面镀以银层。

习　题　(6-3)

6-3-1　均匀平面电磁波在海水中垂直向下传播，已知 $f=0.5$ MHz，海水的 $\varepsilon_r=80$，$\mu_r=1$，$\gamma=4$ S/m，在 $x=0$ 处

$$\boldsymbol{H}=20.5\times10^{-7}\cos(\omega t-35°)\,\boldsymbol{e}_y$$

求：(1)海水中的波长及相位速度；(2)$x=1$ m 处，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表达式；(3)由表面到 1 m 深处，每立方米海水中损耗的平均功率。

6-3-2　计算并比较下列材料的波阻抗、衰减常数和透入深度，铜($\gamma=5.8\times10^7$ S/m)和银($\gamma=6.15\times10^7$ S/m)。已知频率为(1)$f=50$Hz，(2)$f=1$ GHz。

6-3-3　设一均匀平面电磁波在一良导体内传播，其传播速度为光在自由空间波速的 0.1%且波长为 0.3 mm，设媒质的磁导率为 μ_0，试决定该平面电磁波的频率及良导体的电导率。

§6-4　平面电磁波的极化

在前面两节中，对于沿 x 方向传播的均匀平面电磁波，讨论了电场中只有 y 方向分量 E_y 的情况。实际上，均匀平面电磁波的电场在垂直于传播方向的平面内，既可以有 y 方向分量 E_y，也可以有 z 方向分量 E_z，而且合成电场的方向也不一定是固定的。因此在通讯工程中，常采用波的极化来描述正弦平面电磁波中电场强度的组成情况。波的极化是通过电场 $\boldsymbol{E}$ 矢量的端点随时间变化时在空间的轨迹来描述的，若轨迹是直线，就称为直线极化波；若轨迹是圆，则称为圆极化波；若轨迹是椭圆，则称为椭圆极化波。它们分别反映同频率、沿相同方向传播的若干个正弦平面电磁波中电场强度的相位和量值之间的不同关系。下面分别加以讨论。

为不失一般性，假设沿 x 方向传播的正弦均匀平面电磁波的电场由下式给出

$$\boldsymbol{E}=E_{1m}\cos(\omega t-\beta x+\varphi_1)\,\boldsymbol{e}_y+E_{2m}\cos(\omega t-\beta x+\varphi_2)\,\boldsymbol{e}_z \quad (6-57)$$

式中的 E_{1m}、E_{2m}为幅值，φ_1、φ_2 为初相。这可以看作是沿 y 轴和 z 轴的两个场矢量

$$E_y = E_{1m}\cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad 和 \quad E_z = E_{2m}\cos(\omega t - \beta x + \varphi_2)$$

的叠加。

6.4.1　直线极化

若(6－57)式中的 $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$，即 E_y 和 E_z 同相，则在 $x=0$ 平面上，合成电场的量值为

$$E = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2}\cos(\omega t + \varphi) \tag{6-58}$$

它与 y 轴的夹角为

$$\alpha = \arctan\left(\frac{E_{2m}}{E_{1m}}\right) \tag{6-59}$$

上式中，由于 E_{1m}、E_{2m} 为常数，α 不随时间变化，因此合成电场矢量的端点轨迹为一条与 y 轴成 α 角的直线，如图 6－6 所示。

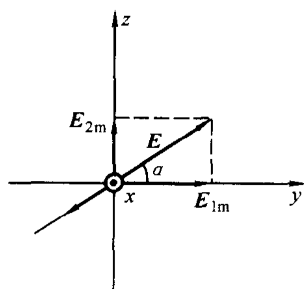


图 6－6　直线极化的平面电磁波

若 φ_1 和 φ_2 不相等，而是相差 π，即 E_y 和 E_z 反相，此时的合成波仍为直线极化波，只是合成电场矢量 E 与 y 轴的夹角 $\alpha = \arctan(-E_{2m}/E_{1m})$。

工程上，常将垂直于地面的直线极化波称为垂直极化波；将平行于地面的直线极化波称为水平极化波。

6.4.2　圆极化

若(6－57)式中电场的两个分量 E_y 和 E_z 幅值相等，$E_{1m} = E_{2m} = E_m$，而且相位差为 $\pm\frac{\pi}{2}$，即

$$E_{2m} = E_{1m} = E_m$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$$

考虑 $x=0$ 的平面，其上合成电场的大小为

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = E_m \tag{6-60}$$

合成电场与 y 轴的夹角为 α，且有

$$\tan\alpha = \frac{E_z}{E_y} = \pm\tan(\omega t + \varphi_1)$$

因此

$$\alpha = \pm(\omega t + \varphi_1) \tag{6-61}$$

(6-60)式和(6-61)式表明，合成电场的大小不随时间变化，但方向却随时间以角速度 ω 改变，即合成电场矢量的端点在一圆周上并以角速度 ω 旋转，故称为圆极化波，如图 6-7 所示。

若 E_y 超前 E_z 的相位为 90°，此时合成电场矢量的旋转方向为反时针方向，与波的传播方向($+x$)构成右手螺旋关系，称为右旋圆极化波。

若 E_z 超前 E_y 的相位为 90°，此时合成电场矢量的旋转方向顺时针方向，与波的传播方向($+x$)构成左手螺旋关系，称为左旋圆极化波。

6.4.3 椭圆极化

在一般情况下，若(6-57)式中电场的两个分量 E_y 和 E_z 的幅值不等，而且初相 φ_1 和 φ_2 之差为任意值，则构成椭圆极化波。直线极化波和圆极化波都可看成是椭圆极化波的特例。

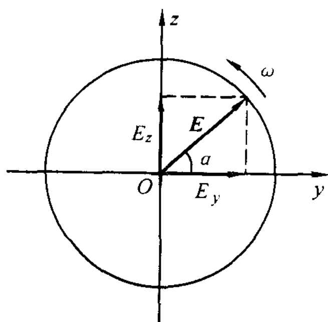


图 6-7 圆极化的平面电磁波

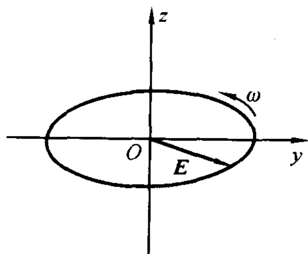


图 6-8 椭圆极化的平面电磁波

例如，为简单而又不失一般性，设 E_z 超前 E_y 的相位为 90°，则在 $x=0$ 的平面上，有

$$E_y = E_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$E_z = -E_{2m}\sin(\omega t + \varphi_1)$$

从上面两式中消去参数 t 后，得

$$\left(\frac{E_y}{E_{1m}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{2m}}\right)^2 = 1 \tag{6-62}$$

这是一个长短半轴分别为 E_{1m}和 E_{2m}的椭圆方程，如图 6-8 所示。合成电场矢量的端点在这个椭圆上旋转，故称为椭圆极化波。

椭圆极化波也有左旋、右旋之分。如果合成电场矢量的旋转方向与波传播方向构成右手螺旋关系，称为右旋椭圆极化波；反之，构成左手螺旋关系则称

为左旋椭圆极化波。图 6－8 所示就是一右旋椭圆极化波。

总之，可以用极化来描述电磁波中电场的组成情况，从而了解整个电磁波的特性。在进一步分析电磁波在自由空间或有限区域内的传播特性或分析天线的有关问题时，波的极化有着广泛的应用。工程上，对如何应用波的极化技术进行了较深入的研究。例如，调幅电台发射出的电磁波中的电场 $\boldsymbol{E}$ 是与地垂直的，所以收听者想得到最佳的收音效果，就应将收音机的天线调整到与电场 $\boldsymbol{E}$ 平行的位置，即与大地垂直。而电视台发射出的电磁波中的电场 $\boldsymbol{E}$ 是与地面平行的，这时电视接收天线应调整到与地面平行的位置。通常见到的电视共用天线都是按照这个原理架设的。再如，在很多情况下，收发系统必须利用圆极化波才能正常地工作。例如由于火箭等飞行器在飞行过程中其状态和位置不断地改变，因此火箭上的天线方位也在不断地改变，此时如用直线极化的发射信号来遥控火箭，在某些情况下就会出现火箭上的天线收不到地面控制信号的情况，而造成失控，如改用圆极化的发射和接收系统，就不会出现这种情况。卫星通讯系统中和电子对抗系统，大多数都是采用圆极化波进行工作的。

例 6－6　证明两个振幅相同，旋向相反的圆极化波可合成为一直线极化波。

解：考虑沿$(+x)$方向传播的两个旋向不同的圆极化波，左旋和右旋圆极化波的电场 E_1 和 E_2 的表达式分别为

$$\boldsymbol{E}_1 = E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t - \beta x + \varphi)\,\boldsymbol{e}_y + E_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t - \beta x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{E}_2 = E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t - \beta x + \varphi)\,\boldsymbol{e}_y + E_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t - \beta x + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_z$$

则，合成波的电场为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = 2E_{\mathrm{m}}\cos(\omega t - \beta x - \varphi)\,\boldsymbol{e}_y$$

由上式可知，合成波是一沿 y 方向的直线极化波，因而上述问题得证。与此相反，任一直线极化波可分解为两个振幅相同，旋向相反的圆极化波的迭加。

习　题　(6－4)

6－4－1　试证：一个在理想介质中传播的圆极化波，其瞬时坡印亭矢量是与时间和距离都无关的常数。

6－4－2　有一垂直穿出纸面$(x=0)$的平面电磁波，由两个直线极化波 $E_z = 3\cos\omega t$ 和 $E_y = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$组成，试证明合成波是椭圆极化波。它是右旋波，还是左旋波？

§6-5 平面电磁波的反射与折射

均匀平面电磁波在无限大均匀媒质中传播时是沿直线方向前进的。但是，若在电磁波传播的路径上出现两种媒质的分界面，由于电磁参数 μ、ε 和 γ 发生突变，这时部分电磁波将被反射回去，这部分波称为反射波；另一部分将透过分界面继续传播，这部分波称为折射波。这一节将从电磁现象的普遍规律出发，讨论均匀平面电磁波入射到平面分界面时出现的反射与折射情况。为简单起见，这里假设分界面是无限大的平面。

6.5.1 平面电磁波在理想介质分界面上的反射与折射

设两种半无限大理想介质的分界面为 $x=0$ 平面，其法向 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴重合，如图 6-9 所示。这里将入射波的入射线与分界面的法线 $\boldsymbol{n}$ 构成的平面称为入射面，如图 6-9 所示的 xOy 平面。另外，假设入射波的传播方向与 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角为 θ_1，相速度为 v_1；反射波的传播方向与 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角为 θ'_1，相速度为 v'_1；折射波的传播方向与 $\boldsymbol{n}$ 间的夹角为 θ_2，相速度为 v_2。θ_1、θ'_1 和 θ_2 分别称为入射角、反射角和折射角。理想介质 1 和 2 的参数分别为 ε_1、μ_1 和 ε_2、μ_2。

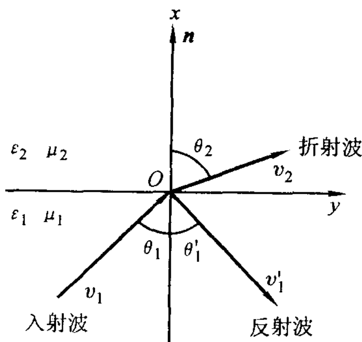


图 6-9 不同媒质分界面发生波的反射和折射

1. 反射定律和折射定律

根据分界面上的衔接条件，在分界面($x=0$)上，对所有 y 值，电场和磁场的切向分量均应连续。这就要求入射波、反射波和折射波三者的电场与磁场对时间 t 的函数关系以及对分界面上位置 y 的函数关系分别具有相同的形式，因此反射波和折射波也一定是均匀平面电磁波，且它们的传播方向也都处于入射面内。同时，入射波、反射波和折射波三者沿 y 方向的相速应相等，即

$$\frac{v_1}{\sin\theta_1}=\frac{v'_1}{\sin\theta'_1}=\frac{v_2}{\sin\theta_2} \tag{6-63}$$

考虑到反射波与入射波在同一种介质中传播，有 $v'_1=v_1$，因此由(6-63)式的前一部分等式，得

$$\theta'_1=\theta_1 \tag{6-64}$$

即反射角等于入射角，这就是反射定律。

又由(6-63)式的后一部分等式，得

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} \tag{6-65}$$

当 $v_2\neq v_1$ 时，$\theta_2\neq\theta_1$。可见，相速数值的改变，会产生电磁波的折射现象。(6-65)式叫做折射定律，也就是光学中的斯耐尔定律。

一般介质的磁导率 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，则

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{6-66}$$

定义介质的折射率 n 为自由空间中电磁波相速与介质中电磁波相速之比，即

$$n=\frac{c}{v}=\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

式中 n 是无量纲量，一般介质 $\mu_r\approx1$，则

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}}\quad 或 \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{n_1}{n_2} \tag{6-67}$$

n_1 和 n_2 分别为介质 1 和 2 的折射率。

2. 反射系数和折射系数

一般的平面电磁波可分解为两种平面电磁波的组合：一种是垂直极化波，即电场方向垂直于入射面；另一种是平行极化波，即电场方向平行于入射面，如图 6-10 所示。下面对这两种极化波分别加以讨论。

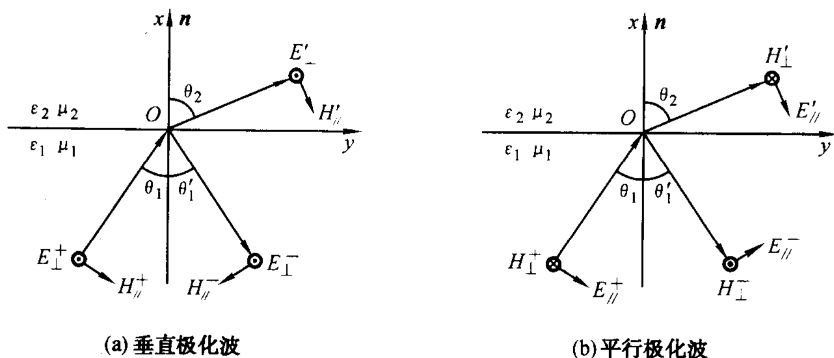


图 6-10　垂直极化波和平行极化波

先讨论垂直极化波，取电场 $\boldsymbol{E}$ 的垂直于入射面的分量 $E_\perp^+$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的平行于入射面的分量 $H_{/\!/}^+$，它们组成这种入射平面电磁波，如图 6-10 (a)所示。利用在介质分界面上电场强度和磁场强度两者的切向分量均连续的条件，对垂直极化波可列出关系式

$$E_\perp^+ + E_\perp^- = E'_\perp \tag{6-68}$$

和

$$H_{/\!/}^+\cos\theta_1 - H_{/\!/}^-\cos\theta_1 = H'_{/\!/}\cos\theta_2 \tag{6-69}$$

考虑到

$$\frac{E_{\perp}^{+}}{H_{/\!/}^{+}}=Z_{01}\qquad \frac{E_{\perp}^{-}}{H_{/\!/}^{-}}=Z_{01}\qquad \frac{E'_{\perp}}{H'_{/\!/}}=Z_{02}$$

代入(6-68)式和(6-69)式，可得

$$\Gamma_{\perp}=\frac{E_{\perp}^{-}}{E_{\perp}^{+}}=\frac{Z_{02}\cos\theta_1-Z_{01}\cos\theta_2}{Z_{02}\cos\theta_1+Z_{01}\cos\theta_2}\tag{6-70}$$

$$T_{\perp}=\frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}^{+}}=\frac{2Z_{02}\cos\theta_1}{Z_{02}\cos\theta_1+Z_{01}\cos\theta_2}\tag{6-71}$$

这里，Z_{01}和Z_{02}分别是介质1和2的波阻抗。而$\Gamma_{\perp}$和$T_{\perp}$分别是垂直极化波的反射系数和折射系数。(6-70)式和(6-71)式就是垂直极化波的菲涅耳公式。

对于平行极化波，取磁场$\boldsymbol{H}$垂直于入射面的分量$H_{\perp}^{+}$和电场$\boldsymbol{E}$的平行于入射面的分量$E_{/\!/}^{+}$，它们组成这种入射平面电磁波，如图6-10(b)所示。根据介质分界面上的衔接条件，对平行极化波也可列出关系式

$$H_{\perp}^{+}-H_{\perp}^{-}=H'_{\perp}\tag{6-72}$$

$$E_{/\!/}^{+}\cos\theta_1+E_{/\!/}^{-}\cos\theta_1=E'_{/\!/}\cos\theta_2\tag{6-73}$$

并考虑到

$$\frac{E_{/\!/}^{+}}{H_{\perp}^{+}}=Z_{01}\qquad \frac{E_{/\!/}^{-}}{H_{\perp}^{-}}=Z_{01}\qquad \frac{E'_{/\!/}}{H'_{\perp}}=Z_{02}\tag{6-74}$$

则可得

$$\Gamma_{/\!/}=\frac{E_{/\!/}^{-}}{E_{/\!/}^{+}}=\frac{Z_{02}\cos\theta_2-Z_{01}\cos\theta_1}{Z_{01}\cos\theta_1+Z_{02}\cos\theta_2}\tag{6-75}$$

$$T_{/\!/}=\frac{E'_{/\!/}}{E_{/\!/}^{+}}=\frac{2Z_{02}\cos\theta_1}{Z_{01}\cos\theta_1+Z_{02}\cos\theta_2}\tag{6-76}$$

这就是平行极化波的菲涅耳公式。$\Gamma_{/\!/}$和$T_{/\!/}$分别是平行极化波的反射系数和折射系数。

菲涅耳公式是与波的极化相关的。它反映了不同介质分界面上反射波电场、折射波电场与入射波电场之间的关系。

6.5.2 平面电磁波在理想介质分界面上的全反射和全折射

下面讨论斜入射中的两个重要现象，即波的全反射和全折射现象。

1. 全反射

当反射系数$|\Gamma_{\perp}|=1$或$|\Gamma_{/\!/}|=1$时，我们说电磁波在介质分界面上发生全反射，即入射波被全部反射回介质1中。如果入射角$\theta_1\neq 90°$，由上述的菲涅尔公式可以看出，只有当$\cos\theta_2=0$时，才有$|\Gamma_{\perp}|=1$或$|\Gamma_{/\!/}|=1$，即折射

角 $\theta_2=90°$时，产生全反射，把使折射角 $\theta_2=90°$的入射角称为临界入射角 θ_c。把 $\theta_2=90°$代入折射定律(6-66)式，得临界入射角 θ_c 满足关系

$$\theta_c = \arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{6-77}$$

注意 ε_1 应大于 ε_2。这表明，电磁波只有由光密介质射向光疏介质，同时满足 $\theta_1 \geqslant \theta_c$ 时，才会发生全反射现象。当发生全反射时，折射波沿分界面传播形成分界面上的表面波。

工程上选用介电常数 ε_1 大于周围媒质的介电常数 ε_2 的介质棒或透明纤维，在入射角 θ_1 大于临界 θ_c 时，将电磁波限制在介质棒中或纤维中连续不断地在内壁上全反射，使携带信息的电磁波沿 Z 字形路径由发送端传播到接收端(如图 6-11 所示)，达到通信的目的。这就是光波导或介质波导的工作原理。

例 6-7 有一介电常数 $\varepsilon>\varepsilon_0$ 的介质棒，欲使波从棒的任一端以任何角度射入，都能限制在该棒之内，直到该波从另一端射出，试求该棒相对介电常数 ε_r 的最小值。

解：参考图 6-11，波在介质棒内发生了全反射，也就是入射角 $\theta_1 \geqslant \theta_c$，即

$$\sin\theta_1 \geqslant \sin\theta_c$$

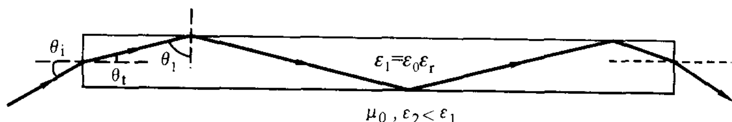


图 6-11 介质棒中电磁波的传播

因
$$\theta_1=\frac{\pi}{2}-\theta_t$$
所以
$$\cos\theta_t \geqslant \sin\theta_c$$
由斯奈尔定律(6-66)式，可得

$$\sin\theta_t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sin\theta_i$$

结合以上各式，并考虑到

$$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}$$

则有
$$\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon_r}\sin^2\theta_i} \geqslant \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

上式必须

$$\varepsilon_r \geqslant 1+\sin^2\theta_i$$

因为当 $\theta_i=\frac{\pi}{2}$时，上式右边将是最大值，所以该介质棒的相对介电常数 ε_r 最小要等于 2。满足这个条件的介质棒可为玻璃或石英。

2．全折射

当反射系数为零时，认为电磁波在分界面上发生了全折射。产生全折射的入射角 θ_B，称为布儒斯特角。对于垂直极化波，由(6－70)式知，当 $Z_{02}\cos\theta_1=Z_{01}\cos\theta_2$ 时，反射系数 $\Gamma_\perp=0$。也就是

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}$$

这里，也考虑到一般介质的 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$。应用斯耐尔定律，上式可写成

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\cos\theta_1=\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_1}$$

所以

$$\cos\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1}$$

显然，为满足上式，必有 $\varepsilon_2=\varepsilon_1$。换句说，垂直极化波要产生全折射，只有当两种介质相同。这实际上是同一种介质，不存在分界面。因此，对于垂直极化波，没有任何入射角能使反射系数等于零，在两种介质分界面上总有反射。

然而，对于平行极化波，当 $\Gamma_{/\!/}=0$，有

$$Z_{01}\cos\theta_1-Z_{02}\cos\theta_2=0$$

设 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，并应用斯耐尔定律，则有

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\cos\theta_1=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_1}$$

或

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sqrt{1-\sin^2\theta_1}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_1}$$

求解可得

$$\sin\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \quad \text{或} \quad \tan\theta_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{6-78}$$

当入射角满足上式时，入射波全部折射到介质 2 中，在介质 1 中没有反射波。满足上式的角就是布儒斯特角 θ_B，即

$$\theta_B=\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{6-79}$$

由此可以得出结论，任意极化波以布儒斯特角 θ_B 入射到两种电介质的分

界面时，反射波只包含垂直极化分量，而波的平行极化分量已全折射了。布儒斯特角的一个重要用途是将任意极化波中的垂直分量和平行分量分离开来，起到了极化滤波的作用，所以 θ_B 也称为极化角或起偏角。例如，光学中的起偏器就是利用了这种极化滤波原理。

例 6-8　纯水的相对介电常数为 80，(1)确定平行极化波的布儒斯特角 θ_B 及对应的折射角；(2)若一垂直极化的平面电磁波自空气中以 $\theta_1=\theta_B$ 射入水面，求反射系数和折射系数。

解：(1) 由(6-79)式可得平行极化波不产生反射的布儒斯特角

$$\theta_B = \arctan\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \arctan\sqrt{80} = 81.0°$$

对应的折射角由(6-66)式可得

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_B}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}+1}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{81}}\right) = 6.38°$$

(2) 对垂直极化的入射波，在 $\theta_i=81.0°$及 $\theta_2=6.38°$，根据(6-70)式和(6-71)式

$$Z_{01} = 377\ \Omega \qquad Z_{01}\cos\theta_2 = 374.67\ \Omega$$

$$Z_{02} = 377/\sqrt{\varepsilon_{r1}} = 42.15\ \Omega \qquad Z_{02}\cos\theta_1 = 6.59\ \Omega$$

所以

$$\Gamma_\perp = \frac{6.59-374.67}{6.59+374.67} = -0.97$$

$$T_\perp = \frac{2\times 6.59}{6.59+374.67} = 0.035$$

6.5.3　平面电磁波在良导体表面上的反射与折射

现在研究平面电磁波在良导体表面上的反射和折射。假设电磁波从理想介质(介电常数为 ε_1)以入射角 θ_1 斜入射到良导体表面(介电常数为 ε_2 和电导率为 γ)，那么，由(6-63)式得良导体内折射波的折射角 θ_2 满足关系式

$$\sin\theta_2 = \frac{v_2}{v_1}\sin\theta_1 \tag{6-80}$$

考虑到 $v_1=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}$，及由(6-55)式知，良导体内波的相速 $v_2=\sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu_2\gamma}}$，因此，上式变为

$$\sin\theta_2 = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2}\frac{2\omega}{\gamma}}\sin\theta_1 \tag{6-81}$$

对于一般的非磁性媒质有 $\mu_1\approx\mu_2\approx\mu_0$，则

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\frac{2\omega\epsilon_1}{\gamma}} \sin \theta_1 \tag{6-82}$$

如果角频率 ω 不太高，则$\frac{2\omega\epsilon_1}{\gamma} \ll 1$。此时，有

$$\sin \theta_2 \approx 0 \qquad 或\ \theta_2 \approx 0 \tag{6-83}$$

这表明，对于良导体不管入射角 θ_1 如何，透入的电磁波都是近似地沿表面的法线方向传播。

对于良导体，其波阻抗

$$Z_{02} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\gamma}}$$

显然，$|Z_{02}| \ll Z_{01}$代入菲涅耳公式，得

$$T_{\perp} \ll 1,\ T_{/\!/} \ll 1\ 和\ \Gamma_{/\!/} \approx -1 \quad \Gamma_{\perp} \approx -1 \tag{6-84}$$

表明无论什么极化波在良导体内的折射波都是很小的，差不多是全反射。

习　题　(6-5)

6-5-1　$f = 1$ MHz 的均匀平面电磁波，由自由空间分别垂直入射到：(1)无限大铜板($\gamma = 5.8\times10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$)；(2)无限大铁板($\gamma = 10^7$ S/m, $\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 10^4$)；(3)海水平面上($\gamma = 4$ S/m, $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$)。分别求：电场反射系数、折射系数。

6-5-2　一个在空气中传播的均匀平面电磁波，以$\dot{E}_i(x) = 10e^{-j6x}e_y$ 垂直入射到 $x = 0$处的理想介质表面，介质的 $\epsilon_r = 2.5$，$\mu_r = 1$。求：

(1) 反射波和折射波的瞬时表示式；(2)空气中及介质中的坡印亭矢量的平均值。

6-5-3　试证明下述两种情况时，在分界面上无反射的条件是布儒斯特角与折射角之和为$\frac{\pi}{2}$，(1)垂直极化($\mu_1 \neq \mu_2$)；(2)平行极化($\epsilon_1 \neq \epsilon_2$)。

§6-6 平面电磁波的正入射·驻波

当平面电磁波的入射方向和两种媒质分界面相垂直时，称为正入射。这里，讨论正入射时反射波、折射波和入射波之间的关系及某些物理现象。

6.6.1 对理想导体的正入射

若媒质 1 是理想介质，媒质 2 是理想导体(即波阻抗 $Z_{02} = 0$)，当平面电磁波由理想介质正入射到理想导体表面时(图 6-12)，把 $\theta_1 = 0$ 和 $Z_{02} = 0$ 代入前一节中得到的菲涅耳公式中，得

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{/\!/} = -1 \quad 和 \quad T_{\perp} = T_{/\!/} = 0 \tag{6-85}$$

可见，波全部被反射，没有透入到理想导体里去。不论是垂直极化波还是平行极化波，在分界面 $x=0$ 处，都有 $E^-=-E^+$ 和 $H^-=H^+$。

如果在理想介质中，设入射波的电场强度为

$$E_y^+(x,t)=\sqrt{2}E\cos(\omega t-\beta x)$$

则反射波的电场强度必为

$$E_y^-(x,t)=\sqrt{2}E\cos(\omega t+\beta x+180°)$$

那末，理想介质中的合成电场强度为

$$\begin{aligned}E_y(x,t)&=E_y^+(x,t)+E_y^-(x,t)\\&=2\sqrt{2}E\sin\beta x\cos(\omega t-90°)\end{aligned}\tag{6-86}$$

同理可得，理想介质中的合成磁场强度为

$$H_z(x,t)=\frac{2\sqrt{2}E}{Z_{01}}\cos\beta x\cos\omega t\tag{6-87}$$

可以看出，函数 $E_y(x,t)$ 的性质显然和入射波电场强度的性质完全不同。函数 $H_z(x,t)$ 的性质和入射波磁场强度的性质也完全不同，但和 $E_y(x,t)$ 的性质相同。下面研究在理想介质中合成场的时空特性。

分析(6-86)式和(6-87)式看出，理想介质中的合成场强有如下特点：

(1) 在 x 轴上任意点，电场和磁场都随时间作正弦变化，但各点的振幅不同，图 6-13 画出了不同 ωt 值时，$E_y(x,t)$ 和 $H_z(x,t)$ 的图形。可见无波的移动，波在空间是驻定的。换句话说，空间各点的场量以不同的振幅随时间作正弦振动，而沿($\pm x$)方向没有波的移动。这说明入射波和反射波合成的结果形成了驻波。

(2) 在任意时刻，合成电场 $E_y(x,t)$ 和 $H_z(x,t)$ 都在距理想导体表面的某些位置有零或最大值。

电场 $E_y(x,t)$ 的零值和磁场 $H_z(x,t)$ 的最大值发生在

$$\beta x=-n\pi\qquad或\qquad x=-\frac{n\lambda}{2}\ (n=0,1,2,\cdots)\tag{6-88}$$

处。这些点称为电场 $\boldsymbol{E}$ 的波节点或磁场 $\boldsymbol{H}$ 的波腹点。而电场 $E_y(x,t)$ 的最大值和磁场 $H_z(x,t)$ 的零值发生在

$$\beta x=-\frac{(2n+1)}{2}\pi\quad或\quad x=-\frac{(2n+1)}{4}\lambda\ (n=0,1,2,\cdots)\tag{6-89}$$

处。这些点称为电场 $\boldsymbol{E}$ 的波腹点或磁场 $\boldsymbol{H}$ 的波节点。

电场(或磁场)的相邻波节点间距离为 $\lambda/2$，相邻波腹点间距离也是 $\lambda/2$。但波节点和相邻的波腹点之间的距离为 $\lambda/4$。磁场的波节点恰与电场的波腹点相重合，而电场的波节点恰是磁场的波腹点，说明电场和磁场在空间上错开了 $\lambda/4$。

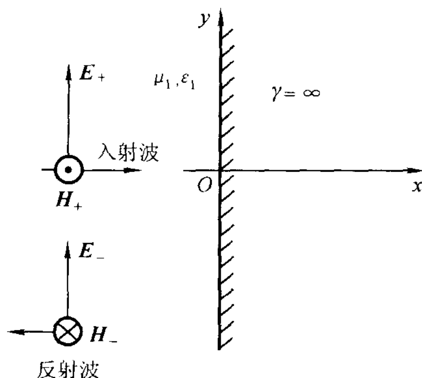


图 6-12 对理想导体的正入射

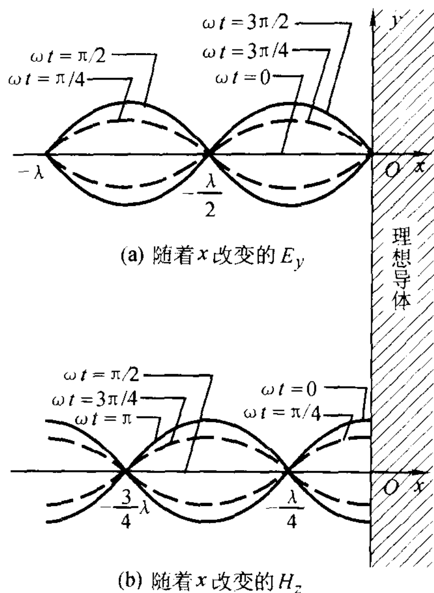


图 6-13 对应不同 ωt 的驻波

(3) 合成电场 $E_y(x,t)$和磁场 $H_z(x,t)$存在$\frac{\pi}{2}$相位差，即在时间上有$\frac{T}{4}$相移。因此，理想介质中总的电磁波的平均功率流密度为零。即在 1 区没有电磁波能量的传输，只有电场能量和磁场能量间的互相交换。由于在波节点处平均功率流密度恒为零，能量不能通过波节点传输，所以电场能量和磁场能量间的交换只能限于在波节点和相邻波腹点之间的 $\lambda/4$ 空间范围内进行。

(4) 在理想导体表面上，电场强度为零，磁场强度最大，因此出现了一层面电流，其密度为

$$\boldsymbol{K}_S = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H} = \frac{2\sqrt{2}E}{Z_{01}}\cos \omega t \boldsymbol{e}_y \tag{6-90}$$

例 6-9 均匀平面电磁波频率 $f=100$ MHz，从空气正入射到 $x=0$ 理想导体平面上，设入射波电场沿 y 方向，振幅 $E_m=6\times10^{-3}$ V/m，试写出：(1)入射波的电场和磁场；(2)反射波的电场和磁场；(3)在空气中合成波的电场和磁场；(4)空气中离理想导体表面第一个电场波腹点的位置。

解：(1) 入射波的电场和磁场的瞬时表达式

$$\boldsymbol{E}^+(x,t) = E_m\cos(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{H}^+(x,t) = \frac{E_m}{Z_{01}}\cos(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_z$$

式中，$E_m=6\times10^{-3}$V/m，$\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{2\pi}{3}$ rad/m，$Z_0=377\ \Omega$，$\omega=2\pi\times10^8$ rad/s。因此

$$\boldsymbol{E}^+(x,t)=6\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^8t-\frac{2\pi}{3}x\right)\boldsymbol{e}_y\ \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}^+(x,t)=\frac{6\times10^{-3}}{377}\cos\left(2\pi\times10^8t-\frac{2\pi}{3}x\right)\boldsymbol{e}_z\ \text{A/m}$$

(2) 理想导体引起全反射，即在 $x=0$ 处

$$E^-=-E^+\qquad 和\qquad H^-=H^+$$

所以，反射波的电场和磁场的瞬时表达式

$$\boldsymbol{E}^-(x,t)=-6\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^8t+\frac{2\pi}{3}x\right)\boldsymbol{e}_y\ \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}^-(x,t)=\frac{6\times10^{-3}}{377}\cos\left(2\pi\times10^8t+\frac{2\pi}{3}x\right)\boldsymbol{e}_z\ \text{A/m}$$

(3) 空气中合成波的电场和磁场的瞬时表达式

$$\begin{aligned}E(x,t)&=E^+(x,t)+E^-(x,t)\\&=12\times10^{-3}\sin\frac{2\pi}{3}x\sin(2\pi\times10^8t)\,\boldsymbol{e}_y\ \text{V/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(x,t)&=H^+(x,t)+H^-(x,t)\\&=\frac{12\times10^{-3}}{377}\cos\frac{2\pi}{3}x\cos(2\pi\times10^8t)\,\boldsymbol{e}_z\ \text{A/m}\end{aligned}$$

(4) 在空气中，离理想导体表面第一个电场波腹点发生在

$$x=-\frac{\lambda}{4}=-\frac{3}{4}\text{m}$$

6.6.2　对理想介质的正入射

若媒质 1 和 2 都是理想介质，当平面电磁波由媒质 1 正入射到两种理想介质分界面时(图 6－14)，不会发生全反射。把 $\theta_1=0$ 代入前一节中得到的菲涅耳公式，得反射系数和折射系数

$$\Gamma=\frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}}$$

$$T=\frac{2Z_{02}}{Z_{02}+Z_{01}}$$

所以

$$E^-=\Gamma E^+\qquad E'=TE^+$$

设入射波电场和磁场的复数表达式为

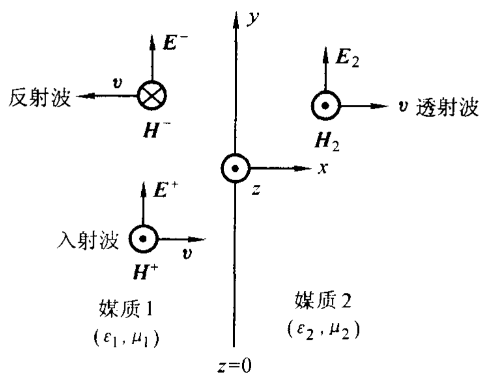


图 6-14 对理想介质分界面的正入射

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}^+(x) &= \dot{E}^+ e^{-j\beta_1 x} \\ \dot{H}^+(x) &= \frac{\dot{E}^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 x} \end{aligned}\right\} \tag{6-91}$$

则反射波电场和磁场的复数表达式为

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}^-(x) &= \Gamma\dot{E}^+ e^{j\beta_1 x} \\ \dot{H}^- &= -\frac{\Gamma\dot{E}^+}{Z_{01}} e^{j\beta_1 x} \end{aligned}\right\} \tag{6-92}$$

而媒质 2 中透射波的电场和磁场的复数表达式

$$\dot{E}_2(x) = T\dot{E}^+ e^{-j\beta_2 x} \tag{6-93}$$

$$\dot{H}_2(x) = \frac{T\dot{E}^+}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 x} \tag{6-94}$$

可见，媒质 2 中的电磁波是等幅行波。

由(6-91)式和(6-92)式可得，媒质 1 中合成波的电场和磁场分别为

$$\begin{aligned} \dot{E}_1(x) &= \dot{E}^+(x) + \dot{E}^-(x) \\ &= \dot{E}^+ e^{-j\beta_1 x} + \Gamma\dot{E}^+ e^{j\beta_1 x} \\ &= \dot{E}^+(1+\Gamma) e^{-j\beta_1 x} + 2j\Gamma\dot{E}^+ \sin \beta x \end{aligned} \tag{6-95}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(x) &= \dot{H}^+(x) + \dot{H}^-(x) \\ &= \frac{\dot{E}^+}{Z_{01}}(1-\Gamma) e^{-j\beta_1 x} - 2j\Gamma \frac{\dot{E}^+}{Z_{01}} \sin \beta_1 x \end{aligned} \tag{6-96}$$

从(6-95)式可以知道，$\dot{E}_1(x)$是由两部分组成：一部分是幅值为$(1+\Gamma)|\dot{E}^+|$的行波；另一部分是幅值为$2\Gamma|\dot{E}^+|$的驻波。也就是说，在媒质 1 中，由于反

射波振幅小于入射波振幅，所以反射波与部分入射波相加形成了驻波，而入射波的其余部分仍为行波。这是一种驻波和行波共存的情形，称合成波为行驻波。

下面讨论在媒质 1 中电场的最大值和最小值位置。将 $\dot{E}_1(x)$写为

$$\dot{E}_1(x) = \dot{E}^+ e^{-j\beta_1 x}(1 + \Gamma e^{j2\beta_1 x}) \tag{6-97}$$

上式表明：(1)当 $\Gamma>0$ 时，电场的最大值是$|\dot{E}^+|(1+\Gamma)$，它发生在 $2\beta_1 x_{\max} = -2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$，即 $x_{\max} = -\dfrac{n\lambda_1}{2}(n=0,1,2,\cdots)$处。电场的最小值是$|\dot{E}^+|(1-\Gamma)$，它发生在 $2\beta_1 x_{\min} = -(2n+1)\pi(n=0,1,2,\cdots)$，即 $x_{\min} = -\dfrac{(2n+1)\lambda_1}{4}(n=0,1,2,\cdots)$处；(2)当 $\Gamma<0$ 时，电场的最大值是$|\dot{E}^+|(1-\Gamma)$，它发生在 $\Gamma>0$ 时所给的 $x_{\min}$处。电场的最小值是$|\dot{E}^+|(1+\Gamma)$，它发生在 $\Gamma>0$ 时所给的 $x_{\max}$处。总之，在入射波和反射波两者相位相同处，它们直接相加，场强取最大值 $E_{1\max} = |\dot{E}^+|(1+|\Gamma|)$；在入射波和反射波两者相位相反之处，它们直接相减，场强取最小值 $E_{1\min} = |\dot{E}^+|(1-|\Gamma|)$。

为了说明媒质 1 中行驻波的性质，通常引入物理量——驻波比 S 来描述，它定义为空间电场强度的最大值与最小值之比，即

$$S = \frac{E_{1\max}}{E_{1\min}} \tag{6-98}$$

利用 $E_{1\max} = |\dot{E}^+|(1+|\Gamma|)$和 $E_{1\min} = |\dot{E}^+|(1-|\Gamma|)$，上式可写为

$$S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{6-99}$$

当 Γ 的值从 -1 变化到 $+1$ 时，S 的值从 1 变化至∞。分析可见：当$|\Gamma|=0$，即无反射时，$S=1$ 表示为一行波，场强的最大值和最小值相等。当$|\Gamma|=1$，即发生全反射时，$S=\infty$表示为一驻波，场强的最小值 $E_{1\min}=0$。

例 6-10　设媒质 2 的参数为 $\varepsilon_{r2}=8.5$，$\mu_{r2}=1$ 及 $\gamma_2=0$，媒质 1 为自由空间。波由自由空间正入射到媒质 2，在两区的平面分界面上入射波电场的振幅为 $E_m^+ = 2.0\times10^{-3}$ V/m，求反射波和折射波电场和磁场的复振幅。

解：自由空间的波阻抗　$Z_{01} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega$

媒质 2 的波阻抗　$Z_{01} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \dfrac{377}{\sqrt{8.5}} = 129\ \Omega$

于是反射波电场和磁场的复振幅值分别是

$$\dot{E}_m^- = \Gamma \dot{E}_m^+ = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \dot{E}_m^+ = -0.693 \times 10^{-3}\ \text{V/m}$$

$$\dot{H}_m^- = -\frac{\dot{E}_m^-}{Z_{01}} = 1.84 \times 10^{-6}\ \text{A/m}$$

折射波电场和磁场的复振幅值分别是

$$\dot{E}' = T\dot{E}^+ = \frac{2Z_{02}}{Z_{02} + Z_{01}} \dot{E}^+ = 7.21 \times 10^{-4}\ \text{V/m}$$

$$\dot{H}' = \frac{\dot{E}'}{Z_{02}} = 5.58 \times 10^{-6}\ \text{A/m}$$

例 6－11 一均匀平面电磁波自自由空间正入射到半无限大的理想介质表面上。已知在自由空间中，合成波的驻波比为 3，理想介质内波的波长是自由空间波长 1/6，且介质表面上为合成电场最小点。求理想介质的相对磁导率 μ_r 和相对介电常数 ε_r。

解：因为驻波比

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 3$$

由此解出

$$|\Gamma| = \frac{1}{2}$$

因为介质表面上是合成电场最小点，故 $\Gamma = -\frac{1}{2}$。而反射系数

$$\Gamma = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

式中 $Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$，$Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$，因而得

$$\frac{\mu_r}{\varepsilon_r} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} = \frac{1}{3} \quad 或 \quad \frac{\mu_r}{\varepsilon_r} = \frac{1}{9}$$

又理想介质内波的波长

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{6}$$

得

$$\mu_r \varepsilon_r = 36$$

因此，不难求得理想介质的相对磁导率和相对介电常数分别是

$$\mu_r = 2 \qquad 和 \qquad \varepsilon_r = 2$$

例 6－12 波阻抗为 Z_{02} 及厚度为 d 的理想介质放置在波阻抗为 Z_{01} 的理想介质之间，如图 6－15 所示，求当介质 1 中的均匀平面电磁波正入射到介质 2 的界面时，不发生反射的 d 及 Z_{02}。

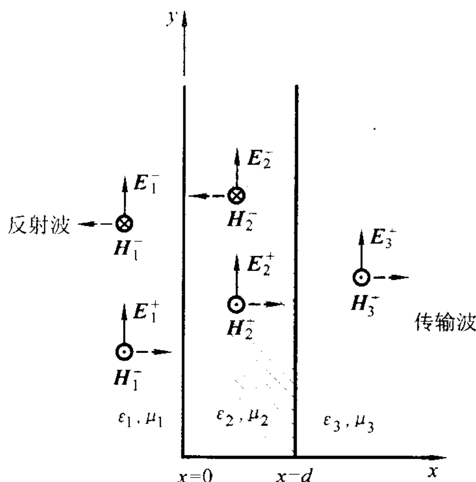


图 6－15 平面电磁波对多层介质分界面的正入射

解：介质 1 中无反射波时，电磁场为

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_1^+ e^{-j\beta_1 x}$$

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{E}_1^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 x}$$

介质 2 中的电磁场为

$$\dot{E}_2 = \dot{E}_2^+ e^{-j\beta_2 x} + \dot{E}_2^- e^{j\beta_2 x}$$

$$\dot{H}_2 = \frac{\dot{E}_2^+}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 x} - \frac{\dot{E}_2^-}{Z_{02}} e^{j\beta_2 x}$$

介质 3 中仅有向 $(+x)$ 方向前进的波，即

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_3^+ e^{-j\beta_3 x}$$

$$\dot{H}_3 = \frac{\dot{E}_3^+}{Z_{03}} e^{-j\beta_3 x}$$

在介质分界面，电场和磁场的切向分量必须连续，所以

在 $x=0$ 处

$$\dot{E}_1^+ = \dot{E}_2^+ + \dot{E}_2^-$$

$$\frac{\dot{E}_1^+}{Z_{01}} = \frac{\dot{E}_2^+}{Z_{02}} - \frac{\dot{E}_2^-}{Z_{02}}$$

把以上两式相比，且令 $\Gamma=\dfrac{\dot{E}_2^-}{\dot{E}_2^+}$，可得

$$Z_{01} = Z_{02}\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

$$\Gamma = \frac{Z_{01}-Z_{02}}{Z_{01}+Z_{02}}$$

在 $x=d$ 处

$$\dot{E}_2^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d} + \dot{E}_2^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d} = \dot{E}_3^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_3 d}$$

$$\frac{1}{Z_{02}}(\dot{E}_2^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d} - \dot{E}_2^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}) = \frac{1}{Z_{03}}\dot{E}_3^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}$$

上面两式相比，且代入 $\Gamma=\dfrac{\dot{E}_2^-}{\dot{E}_2^+}$，有

$$Z_{02}\frac{1+\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_2 d}}{1-\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_2 d}} = Z_{03}$$

因此

$$\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_2 d} = \frac{Z_{03}-Z_{02}}{Z_{03}+Z_{02}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_2 d} = \cos(2\beta_2 d) + \mathrm{j}\sin(2\beta_2 d) = \frac{1}{\Gamma}\frac{Z_{03}-Z_{02}}{Z_{02}+Z_{03}} = \frac{Z_{01}+Z_{02}}{Z_{01}-Z_{02}}\cdot\frac{Z_{03}-Z_{02}}{Z_{03}+Z_{02}}$$

由于理想介质的波阻抗都是实数，所以上式右端也为实数，故必有

$$\sin(2\beta_2 d) = 0 \qquad 或 \qquad 2\beta_2 d = n\pi$$

$$d = \frac{n\pi}{2\beta_2} = \frac{n\lambda_2}{4}$$

另一方面，如 n 等于奇数，则

$$\cos(2\beta_2 d) = -1 = \frac{(Z_{01}+Z_{02})(Z_{03}-Z_{02})}{(Z_{01}-Z_{02})(Z_{03}+Z_{02})}$$

解得

$$Z_{02} = Z_{01}Z_{03}$$

以上说明当介质 1 和介质 3 不同时，介质 1 中无反射波的条件是 Z_{02}必须等于 Z_{01}和 Z_{03}的几何平均值，且 d 必须是四分之一波长的奇整数倍。光学透镜表面上的介质敷层就是利用了这一原理，消除光波通过透镜时的反射。

如果 n 等于偶数，则

$$\cos(2\beta_2 d) = 1 = \frac{(Z_{01}+Z_{02})(Z_{03}-Z_{02})}{(Z_{01}-Z_{02})(Z_{03}+Z_{02})}$$

解得

$$Z_{03} = Z_{01}$$

这表明，当 $Z_{03}=Z_{01}$ 时，介质 1 中无反射波的条件是介质 2 的厚度必须为半波长的整数倍。所以半波长厚度的介质片称为“半波窗”，因为它对给定波长的电磁波，犹如一个无反射的窗口。例如，“雷达天线罩”就是这样的窗口，它是一个半圆形覆盖物，既保护雷达免受恶劣气候的影响，又使电磁波通过时反射最小。

6.6.3　入端阻抗 $Z(x)$

根据(6－95)式和(6－96)式很容易推导出，在媒质 1 中的任意点 x 处，合成波的电场强度与磁场强度的比值 $Z(x)$ 为

$$Z(x) = \frac{\dot{E}_1(x)}{\dot{H}_1(x)} = Z_{01}\frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)} \tag{6-100}$$

$Z(x)$ 称为 x 处的入端阻抗。其中 $\Gamma(x)=\Gamma e^{j2\beta_2 x}$ 叫做离分界面 x 远处的反射系数，可以应用它决定沿 x 轴任意点的反射波。

入端阻抗 $Z(x)$ 表示了有分界面时，两侧媒质性质对电场和磁场关系的影响，可用 $Z(x)$ 等值替代自该处起沿($+x$)方向上所有不同媒质的共同特性。也就是说，如果用波阻抗 $Z_0=Z(x)$ 的均匀半无限大媒质来代替该处沿($+x$)方向向右的所有媒质时，它对 x 处左方电磁波的作用与原来媒质的影响是相同的。因此，$Z(x)$ 又称为等效波阻抗。利用等效波阻抗的概念可以方便地分析多层媒质中波的反射和折射问题，它与电路中的入端阻抗概念非常相似。

若空间存在三层媒质，如图 6－15 所示。这时媒质 2 中的合成波是在 $x=0$ 和 $x=d$ 两个分界面上多次反射的结果，但它可以归并为一个沿($+x$)方向传播的行波和一个沿($-x$)方向传播的行波。因此媒质 2 内($0\leqslant x<d$)，$x=0$ 处的入端阻抗由(6－100)式可得

$$Z(0) = Z_{02}\frac{Z_{03}\cos\beta_2 d + jZ_{02}\sin\beta_2 d}{Z_{02}\cos\beta_2 d + jZ_{03}\sin\beta_2 d} \tag{6-101}$$

这样，可以用波阻抗等于入端阻抗 $Z(0)$ 的半无限大均匀媒质代替 $x=0$ 右边两种媒质的影响，即对于媒质 1 中的波来说，它在 $x=0$ 处遇到了媒质不连续情况，而这种不连续性可等效为在 $x=0$ 处具有波阻抗为 $Z(0)$ 的半无限大媒质。因此，媒质 1 中的入射波到达 $x=0$ 分界面时，其反射系数表达式为

$$\Gamma = \frac{Z(0)-Z_{01}}{Z(0)+Z_{01}} \tag{6-102}$$

上面分析表明，将厚度为 d、波阻抗为 Z_{02}的介质层插在波阻抗分别为 Z_{01}和 Z_{03}的媒质之间，其效果相当于将波阻抗 Z_{03}变成 $Z(0)$。若 Z_{01}、Z_{03}已知，则可以通过选择适当的 Z_{02}和 d 来达到调整 Γ 的目的。

对于空间存在多层媒质的情况，仍然可以采用上面分析三层媒质的方法。

例 6-13 应用入端阻抗的分析方法重解例 6-12。

解：如图 6-15 所示，要使 $x=0$ 分界面不发生反射，其条件是该分界面上的反射系数 $\Gamma=0$ 或 $Z(0)=Z_{01}$，由(6-101)式有

$$Z_{02}(Z_{03}\cos\beta_2 d+\mathrm{j}Z_{02}\sin\beta_2 d)=Z_{01}(Z_{02}\cos\beta_2 d+\mathrm{j}Z_{03}\sin\beta_2 d)$$

使实部、虚部分别相等，有

$$Z_{03}\cos\beta_2 d=Z_{01}\cos\beta_2 d$$

$$Z_{02}^2\sin\beta_2 d=Z_{01}Z_{03}\sin\beta_2 d$$

以下分两种情况讨论：

(1) 当 $Z_{03}=Z_{01}\neq Z_{02}$时，要求

$$\sin\beta_2 d=0 \qquad \text{或} \qquad d=\frac{n\lambda_2}{2} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

即对于给定的工作频率，介质层厚度应为介质中的半波长的整数倍，可以消除反射。这种介质层称为半波介质窗。

(2) 当 $Z_{03}\neq Z_{01}$时，要求

$$Z_{02}=\sqrt{Z_{01}Z_{03}}$$

和

$$\cos\beta_2 d=0 \qquad \text{或} \qquad d=\frac{(2n+1)\lambda_2}{4} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

说明当媒质 1 与媒质 3 不同时，Z_{02}应等于 Z_{01}和 Z_{03}的几何平均值，d 应为介质 2 中的四分之一波长的奇数倍，可以消除反射。媒质 2 的作用如同一个四分之一波长的阻抗变换器。

习 题 (6-6)

6-6-1 平面电磁波由空气正入射到金属导体的表面上，若导体为理想导体，入射波的波长为 10 m，磁场强度为 1 A/m，求入射波的电场强度及形成驻波后的磁场强度的波腹值及其位置。

6-6-2 设一平面电磁波，其电场沿 y 轴取向、频率为 1 GHz，振幅为 100 V/m，初

相位为零。今该波由媒质 1 正入射至媒质 2，媒质 1 和媒质 2 的分界面为 $x=0$ 平面，且它们的参数分别为 ε_1、μ_1 和 ε_2、μ_2。求：

(1) 每一区域中的波阻抗和传播常数；

(2) 两区域中的电场、磁场的瞬时形式。

6-6-3　在 $x>0$ 区域，媒质的介电常数为 ε_2，在此媒质的表面放置厚度为 d、介电常数为 ε_1 的介质板。对由左面自由空间正入射过来的均匀平面电磁波，证明当 $\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$ 和 $d=\lambda_0/(4\sqrt{\varepsilon_{r1}})$时，不产生反射。$\lambda_0$ 是自由空间中的波长。

6-6-4　证明：平面电磁波正入射至两种理想介质的分界面，若其反射系数与折射系数大小相等，则其驻波比等于 3。

提　　要

1. 在时变电磁场中，电场和磁场之间存在着耦合，这种耦合以波动的形式存在于空间中，即在空间有电磁场的传播。变化电磁场在空间的传播称为电磁波。电磁波的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\gamma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\gamma\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0$$

2. 本章着重介绍不同媒质中传播的平面电磁波。平面电磁波是指等相面为平面的电磁波。如果等相面上各点场强都相等，则称为均匀平面电磁波。

在均匀平面电磁波中，电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 除了与时间 t 有关外，仅与传播方向的坐标变量有关，沿传播方向没有电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的分量(即为横电磁波或 TEM 波)，且 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 到处互相垂直。$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 指向波传播的方向。

此外，在理想介质中，均匀平面电磁波的电场值 E 和磁场值 H 之比等于波阻抗 $Z_0\left(=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\right)$，电场能量密度和磁场能量密度相等，且 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 的值等于能量密度与相速的乘积。在导电媒质中，均匀平面电磁波的振幅随着传播距离增加呈指数规律衰减，衰减快慢由衰减常数 α 决定，且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不同相位。

沿$(+x)$方向传播的正弦均匀平面电磁波的一般表达式为

$$E_y^+(x,t)=\sqrt{2}E_y^+\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\omega t-\beta x+\varphi)$$

$$=\sqrt{2}E_y^+\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\omega\left(t-\frac{x}{v}+\frac{\varphi}{\omega}\right)$$

下面列出三类媒质中的均匀平面电磁波特性及参数的比较。

	理想介质	导电媒质	良导体 $\left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}\geqslant 1\right)$
传播常数 k	$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\mathrm{j}\beta$	$\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1+\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\right)}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}(1+\mathrm{j})$
相位常数 β	$\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\omega\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$
衰减常数 α	0	$\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$
相速度 v	$1/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\left[\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}\right]^{-1}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$
波长 λ	$T/\sqrt{\mu\varepsilon}$	$\left[f\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}\right]^{-1}$	$2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$
波阻抗 Z_0	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\left(1+\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\right)}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\angle 45^\circ$

3. 如果合成电磁波是由具有相同传播方向的平面电磁波组成，则它们的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的取向，通常用波的极化来描述。按电场强度 $\boldsymbol{E}$ 矢量的端点随时间变化在空间的轨迹的不同，平面电磁波分作直线极化波、圆极化波和椭圆极化波。对于圆及椭圆极化波，又有左旋和右旋之分。

4. 均匀平面电磁波传播到不同媒质分界面处，要发生反射和折射现象。一般的分析方法是将入射波分解为垂直极化波和平行极化波来分别处理。

根据分界面上的衔接条件导得：

反射定律　　反射角 $\theta_1'=$ 入射角 θ_1

折射定律　　$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$

在正入射情况下，反射系数和折射系数分别为

$$\Gamma=\frac{Z_{02}-Z_{01}}{Z_{02}+Z_{01}}\qquad T=\frac{2Z_{02}}{Z_{02}+Z_{01}}$$

两者有关系式　　$T=\Gamma+1$

描述反射波大小的参数，还有驻波比

$$S=\frac{E_{\max}}{E_{\min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

无反射时　　$S=1$　　$\Gamma=0$

全反射时　　$S=\infty$　　$|\Gamma|=1$

5. 当波由理想介质(媒质 1)传播到理想导体(媒质 2)时，发生全反射，这时在理想介质中出现驻波，而在理想导体中不存在电磁波。

驻波的一般表达式为

$$E_y(x,t) = 2\sqrt{2}E\sin\beta x\cos(\omega t - 90^\circ)$$

$$H_z(x,t) = \frac{2\sqrt{2}E}{Z_{01}}\cos\beta x\cos\omega t$$

在驻波中，电场 E_y 和磁场 H_z 都在空间某些固定位置有零或最大值。零值点称为波节点，最大值点称为波腹点。电场(或磁场)的相邻波节点间距离为 $\lambda/2$，相邻波腹点间距离也为 $\lambda/2$，但波节点和相邻的波腹点之间距离为 $\lambda/4$。

驻波中没有平均功率的传输，只有电能和磁能间的相互交换。

6. 分析多层媒质中波的正入射问题，引入入端阻抗 $Z(x)$ 可使问题简化。

思 考 题

6-1 什么是平面电磁波？何谓均匀平面电磁波？何谓 TEM 电磁波？它们具有哪些异同点？

6-2 在理想介质中，$\rho=0$ 的条件下，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 分别满足什么方程？写出数学表达式，并讨论其通解所表征的性质。

6-3 说明电磁波的频率 f、周期 T、角频率 ω、波长 λ、传播常数 Γ、衰减常数 α、相位常数 β 和相速 v 的定义，它们与哪些量有关？彼此间怎样关联？

6-4 比较理想介质与导电媒质中传播的均匀平面电磁波的异同点，并解释为何会产生这些差异？

6-5 比较在 $\gamma \ll \omega\epsilon$ 及 $\gamma \gg \omega\epsilon$ 的两种媒质中平面电磁波的传播特性。

6-6 什么是波的极化？如有两互相垂直的线性极化波，试述二者叠加时会发生下列哪种情况：(1)另一直线极化波；(2)圆极化波；(3)椭圆极化波。

6-7 何谓反射系数和折射系数。它们的关系怎样？在什么情况下反射系数和折射系数是常数。在介质与理想导体的分界面上，反射系数与折射系数的大小为何。

6-8 在何种情况下，垂直极化波的反射系数及折射系数和平行极化波的反射系数及折射系数相同？

6-9 平面电磁波正入射到两种媒质的分界面时，应满足怎样的条件？反射系数和折射系数如何？

6-10 何谓驻波？形成驻波的条件是什么？它和行波的差异如何？

6-11 试计算由两个同频同方向传播的直线极化波合成的平面电磁波的能量流密度的平均值。

6-12 当平面电磁波是圆极化波时，试证瞬时坡印亭矢量为一常数。

6-13 什么是无反射与全反射？在什么情况下会发生这些现象？

6-14 入端阻抗 $Z(x)$ 是如何定义的？它在分析多层媒质中波的反射和折射问题时都

有哪些应用?

习 题

6-1 在空气中，均匀平面电磁波的电场强度为 $\boldsymbol{E}=800\cos(\omega t-\beta x)\boldsymbol{e}_y$，波长为 0.61m，求(1)电磁波的频率；(2)相位常数；(3)磁场强度的振幅和方向。

6-2 自由空间中传播的电磁波的电场强度 E 的复数形式为

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20\pi x}\boldsymbol{e}_y\ \mathrm{V/m}$$

(1) 求频率 f 及 E、H 的瞬时表达式；

(2) 当 $x=0.025\mathrm{m}$ 时，场在何时达到最大值和零值；

(3) 若在 $t=t_0$，$x=x_0$ 处场强达到最大值，现从这点向前走 100 m。问在该处要过多少时间，场强才达到最大值。

6-3 一信号发生器在自由空间产生一均匀平面电磁波，波长为 12 cm，通过理想介质后波长减小为 8 cm，在介质中电场振幅为 50 V/m，磁场振幅为 0.1 A/m。求发生器的频率、介质的 ε_r 及 μ_r。

6-4 据估计，晴天时太阳辐射到地球的功率为 1.34 $\mathrm{kW/m^2}$ (对入射波而言)，假设阳光为一单色平面电磁波，计算入射波中的电场强度 E_{max}和磁感应强度 B_{max}。

6-5 一频率为 3 GHz，沿 y 方向极化的均匀平面电磁波，在 $\varepsilon_r=2.5$，$\gamma=1.67\times10^{-3}$ S/m的非磁性媒质中，沿$(+x)$方向传播，求:

(1) 波的振幅衰减至原来的一半时，传播了多少距离；

(2) 媒质的波阻抗、波长和相速；

(3) 设在 $x=0$ 处，$\boldsymbol{E}=50\sin\left(6\pi\times10^9t+\dfrac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{e}_y$，写出 $\boldsymbol{H}$ 在任何时刻 t 和 x 值时的瞬时表达式。

6-6 有一非磁性良导体，电磁波在其内的传播速度是自由空间光速的 0.1%，波长为 0.3 mm，求材料的电导率及波的频率。

6-7 在导电媒质(物理参数为 μ_0,ε_0 和 γ)中有一向 x 轴传播的均匀平面电磁波。

(1) 试决定单位体积中热功率损耗的瞬时值和平均值；

(2) 决定横截面为单位面积，长度为 $0\to\infty$ 的体积中耗散的平均功率；

(3) 决定坡印亭矢量的平均值，并计算横截面为单位面积，长度为 $0\to\infty$ 的体积中耗散的平均功率；

(4) 试将(2)和(3)的结果相比较，以良导体为例说明两者是否相等。

6-8 已知一个平面电磁波在空间某点的电场表达式为 $\boldsymbol{E}=(E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z)$V/m 其中

$$E_y=(\alpha_1\sin\omega t+\alpha_2\cos\omega t)\ \mathrm{V/m}\qquad E_z=(3\sin\omega t+4\cos\omega t)\ \mathrm{V/m}$$

若此波为圆极化波，求 α_1，α_2 为何值。

6-9 均匀平面电磁波的电场为 $\dot{\boldsymbol{E}}=100\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$ V/m，从空气垂直入射到理想介质平面上(介质的 $\mu_1=\mu_0,\varepsilon_2=4\varepsilon_0,\gamma_2=0$)。求反射波和折射波的电场有效值。

6-10 均匀平面电磁波在自由空间的 $\lambda=3$ cm，正入射到玻璃纤维罩上，罩的 $\varepsilon_r=$

4.9，$\gamma=0$，求：(1)不发生波反射时罩的厚度；(2)若入射波的频率降低10%，透射功率为入射功率的百分之几？

6-11　平行极化的平面电磁波由 $\varepsilon_r=2.56$，$\mu_r=1$ 和 $\gamma=0$ 的介质斜入射到空气中，问：

(1) 波能否全部折入空气中？若能，其条件是什么？

(2) 波能否全反射回介质中？若能，其条件又是什么？

(3) 当波从空气中斜入射到介质时，重答(1)、(2)。

6-12　垂直极化的平面电磁波由 $\varepsilon_r=2.56$，$\mu_r=1$ 和 $\gamma=0$ 的介质斜入射到空气中，问：

(1) 波能否发生全反射现象？为什么？

(2) 波能否发生全折射现象？为什么？

(3) 当波从空气中斜入射到介质中时，重答(1)及(2)问。

6-13　从水底下光源射出来的垂直极化电磁波，以 $\theta_1=20°$ 的入射角，入射到水、空气的界面。水的 $\varepsilon_r=81$，$\mu_r=1$，求

(1) 临界角 θ_c；　(2) 反射系数 $\Gamma_\perp$；　(3) 折射系数 $T_\perp$；

6-14　设在空间有一沿 x 轴取向，频率为100 MHz，振幅为100 V/m，初相为零的均匀平面电磁波，正入射于一个无损耗的介质面，如题6-14图所示。

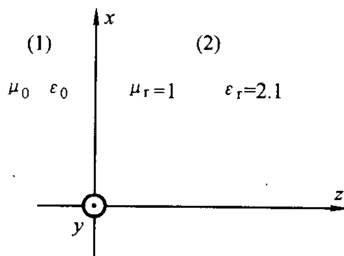
(1) 求每一区域中的波阻抗及传播常数；

(2) 求反射波和折射波的振幅；

(3) 分别求两区域中电场强度和磁场强度的复数形式和瞬时形式；

(4) 证明场量在分界面上满足边界条件；

(5) 写出坡印亭矢量的复数形式和瞬时形式。



题6-14图

6-15　已知 $\boldsymbol{H}_1=2\cos(\omega t-\beta_1 x)\boldsymbol{e}_z$ A/m，在 $\varepsilon_{r1}=4$，$\mu_{r1}=1$ 和 $\gamma=0$ 的媒质中传播，$x=0$ 处为该媒质和另一媒质的分界面，后者的 $\varepsilon_{r2}=2$，$\mu_{r2}=5$ 和 $\gamma_2=0$，设 $f=5\times10^9$ Hz。求：

(1) 媒质1中的 E_{max} 及 E_{min}；

(2) 媒质1中驻波比；

(3) 输入媒质2中的平均功率密度。

6-16　一段长300 m，半径 $a=2.5\times10^{-3}$ m 的圆柱形导体，其电导率 $\gamma=5.1\times10^6$ S/m，磁导率 $\mu=100\mu_0$，流过交变电流 $i(t)=1.5\cos 3\times10^4 t$。试求(1)透入深度 d；(2)交流电阻 R_S；(3)直流电阻 R_d；(4)该段导体的功率损耗。

6-17　设有三种不同的均匀无损耗媒质平行放置，媒质参数分别为 ε_1、μ_1；ε_2、μ_2；ε_3、μ_3。媒质2的厚度为 d。

(1) 若波在媒质1中电场振幅为 E_{10}，垂直入射后，求媒质1中的反射波、媒质3中的折射波，并写出媒质1中的反射系数和媒质3中的折射系数；

（2）如何选择媒质 2 的参量ε_2 和μ_2 及其厚度d，才可实现由媒质 1 到媒质 3 的全折射。

6－18　某高灵敏度仪器必须高度屏蔽外界电磁场，使外界磁场强度影响减小到 0.01 A/m 以下。但由于它所工作的地点邻近电力线路，据实测干扰磁场强度为 12 A/m。试计算用铝板($\mu_r=1, \gamma=35.7\times10^6$ S/m)屏蔽及采用铁板($\mu_r=2\ 000, \gamma=8.3\times10^6$ S/m)屏蔽所需的厚度。

6－19　海水的 $\varepsilon_r=81$，$\mu_r=1$，$\gamma=4$ S/m，一频率为 300 MHz 的均匀平面电磁波自海面垂直进入海水。设在海面场强为 $E=10^{-3}$ V/m（合成波电场幅度）。求：

（1）波在海水中的速度及波长；

（2）海水与空气分界面处的磁场强度；

（3）进入海水每单位面积的电磁能流；

（4）海水中距海面 0.1 m 处的电场强度与磁场强度的振幅；

（5）问波进入海水多少距离后使场强振幅衰减为原来的 1%？

6－20　一均匀平面电磁波由空气正入射到理想介质表面上，介质参数为 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=9$，$\gamma=0$。如果在介质中，距介质分界面 5 m 处的磁场强度表达式为

$$\dot{H}_2 = 10\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 x} = 10\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\ \mathrm{A/m}$$

（介质表面在 $x=0$ 处，初相位 $\varphi=0$）。试求：

（1）电磁波的频率 f；

（2）写出空气和理想介质中的电场和磁场瞬时表达式；

（3）介质中的坡印亭矢量的瞬时值和平均值；

（4）介质中电场和磁场的能量密度 w'_e 与 w'_m，以及电场与磁场的最大能量密度的大小 w'_{emax} 与 w'_{mmax}。

6－21　介质 1 为理想电介质，$\varepsilon_1=2\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_0$，$\gamma_1=0$；介质 2 为空气。平面电磁波由介质 1 向分界面上斜入射，入射波电场与入射面平行，见图(6－9)。试求：

当入射角 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 时

（1）全反射的临界角 θ_c；

（2）介质 2（空气）中折射波的折射角 θ_2；

（3）反射系数 $\Gamma_{//}$；

（4）折射系数 $T_{//}$；

当入射角 $\theta_1=\frac{\pi}{3}$ 时

（5）是否满足无反射条件，布儒斯特角 θ_B 是多少？

（6）入射波在入射方向的相速度 v；

（7）入射波在 x 方向的相速度 v_x；

（8）入射波在 y 方向的相速度 v_y；

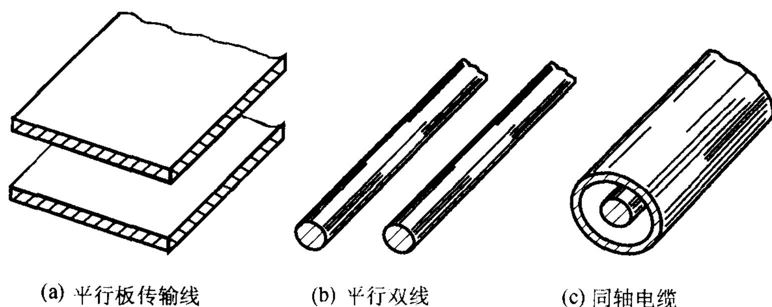
（9）在媒质 2 中，波以什么速度传播以及沿什么方向传播？

（10）在媒质 2 中平均功率流密度 S_{av}。

第七章　均匀传输线中的导行电磁波

辐射源发出的电磁波是向各个方向传播的，在远区将覆盖空间非常大的范围，这是一种非定向的能量传输，若不经导向，接收机接收的效率将很低。工程上采用传输线来引导电磁波，以达到高效率地把能量或信息定向地从一点传输到另一点的目的。

传输线的种类很多，本章将主要讨论用来传输 TEM 波的双导体传输线，常见的有平行板传输线、平行双线、同轴电缆、带状线等，如图 7－1 所示。通过研究无损耗均匀传输线中 TEM 波的性质，把电场、磁场和电压、电流直接联系起来，导出无损耗均匀传输线方程，由此分析电磁波在两线传输线中的传播特性。本章还将讨论均匀传输线方程的解在正弦稳态下的行波性质。对于传输线输出端接有不同负载的情况，分析电压行波、电流行波和入端阻抗沿线的分布规律，重点讨论无损耗线中的驻波及其特点。最后介绍有损耗传输线。



(a) 平行板传输线　　(b) 平行双线　　(c) 同轴电缆

图 7－1　几种常用传输线

§7－1　无损耗均匀传输线方程

若传输线的导体材料、横截面形状和尺寸、相对位置及周围介质沿线都无变化，称之为均匀传输线。再者，如构成传输线的导体是理想导体，且线间介质是理想介质，称为无损耗均匀传输线。

本章着重讨论无损耗均匀传输线中 TEM 波的传播特性。在这一节中，首先分析 TEM 波电场和磁场的特点，再把它们和均匀传输线中的积分量电压 U

和电流 I 联系起来，从而导出无损耗均匀传输线方程。

7.1.1 无损耗均匀传输线上的 TEM 波

首先研究由理想导体组成的二线均匀传输线，如图 7-2 所示。该传输线的轴向长度可与被导引电磁波的波长相比拟(或更长)，但导线的轴线间距离 d 必须较导引的电磁波的波长短得多，即 $d \ll \lambda$，只有这样，才能忽略该方向上的推迟效应，即可忽略辐射。因此，该系统中除了负载吸收能量以外别无其它形式的能量损耗，即可以认为电磁波传输的只是电源供给负载的功率。

设由两根平行理想导体构成的均匀传输线沿 z 轴放置，其中通有轴向电流，如图 7-2 所示。用动态矢位 $\boldsymbol{A}$ 和动态标位 φ 来描述传输线周围的电磁场，有

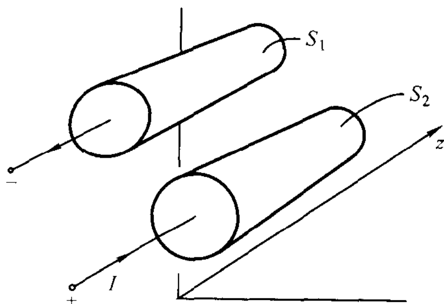


图 7-2 支承 TEM 场的平行理想导体结构

$$A = A_z(x, y, z, t) \tag{7-1}$$

$$\varphi = \varphi(x, y, z, t) \tag{7-2}$$

由于电流只有轴向分量，故知 $\boldsymbol{A}$ 只有轴向分量。又由 $\boldsymbol{B} = \nabla \times A$，可得 $B_z = 0$；因导体是理想的，导体内没有电场的轴向分量，所以根据电场切向分量必须连续的条件，导线周围介质中也有 $E_z = 0$。由此可见，无损耗均匀传输线周围的电磁波只有横向分量，即传输的是横电磁波或 TEM 波。

在第四章中已经知道，$\boldsymbol{A}$ 和 φ 满足齐次波动方程

$$\nabla^2 A_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0 \tag{7-3}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{7-4}$$

若把三维拉普拉斯算子分解为对横向坐标部分 $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 和对 z 的二阶导

数$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，则上式可写为

$$\nabla_t^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0 \tag{7-5}$$

$$\nabla_t^2 \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{7-6}$$

根据电场和动态位之间的关系 $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial A_z}{\partial t}\boldsymbol{e}_z$ 知

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

考虑到 $E_z = 0$，所以得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0 \tag{7-7}$$

把(7－1)式代入洛仑兹规范

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

得

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{7-8}$$

在(7－7)式和(7－8)式中消去 φ，有

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \tag{7-9}$$

在(7－7)式和(7－8)式中消去 A_z，有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{7-10}$$

考虑到(7－9)式和(7－10)式，(7－5)式和(7－6)式则简化为

$$\nabla_t^2 A_z = 0 \tag{7-11}$$

$$\nabla_t^2 \varphi = 0 \tag{7-12}$$

上面两个微分方程与二线传输线静态电磁场的位函数所满足的微分方程完全相同。由于在同一系统中，静态电磁场和 TEM 波又满足相同的边界条件，所以其解应当完全相同，即 TEM 波的电场和磁场在传输线横截面内的分布和静态场的分布完全一样。

根据无损耗均匀传输线周围 TEM 波的这一特点，可以方便地分别把传输系统的电压与电场、电流与磁场联系起来，得到用电压和电流表示的传输线方程，即不去论及电场与磁场，而把电路中电压、电流及阻抗等概念引入传输线问题。

7.1.2 无损耗均匀传输线方程

由上述讨论可知，对于无损耗均匀传输线周围的 TEM 波来说，横截面内的电场强度(或磁场强度)和无源区域中静电场(或恒定磁场)的基本方程组相同。因此，在任一横截面内电场满足$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$而且可以表示为$\boldsymbol{E}=-\nabla_t\varphi$。这表明在给定$z$值的任一平面内，导线 1 和导线 2 之间的电压仍有意义，定义为

$$U(z,t)=\int_2^1\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_2^1(-\nabla_t\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\varphi_2-\varphi_1 \qquad (7-13)$$

这里$U(z,t)$称为同一横截面内传输线的两导体间的电压，它不仅随时间t变化，还与z值有关。在同一时刻t，不同z值的平面上的电场分布是不相同的，所以不能笼统地称传输线两导体间的电压，只能说某截面内(即某一z值处)两导体间的电压。

穿过传输线两导体之间单位长度内的磁通为

$$\Phi_{\mathrm{m}}=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=A_{z2}-A_{z1}=L_0I(z,t) \qquad (7-14)$$

式中L_0为传输线每单位长度上的电感。

(7-13)式和(7-14)式中的φ_1、A_{z1}和φ_2、A_{z2}分别满足(7-7)式和(7-8)式，即有下列关系式

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial A_{z1}}{\partial t}=0 \qquad (7-15)$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial A_{z2}}{\partial t}=0 \qquad (7-16)$$

$$\frac{\partial A_{z1}}{\partial z}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0 \qquad (7-17)$$

$$\frac{\partial A_{z2}}{\partial z}+\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}=0 \qquad (7-18)$$

(7-16)式和(7-15)式左右两边相减，并将(7-13)式和(7-14)式代入并整理得

$$\frac{\partial U}{\partial z}+L_0\frac{\partial I}{\partial t}=0 \qquad (7-19)$$

同理，(7-18)式和(7-17)式左右两边相减，将(7-13)式和(7-14)式代入，并利用$L_0C_0=\mu\varepsilon$①，可得

$$\frac{\partial I}{\partial z}+C_0\frac{\partial U}{\partial t}=0 \qquad (7-20)$$

式中C_0为传输线每单位长度上的电容。

---

① 二线传输线每单位长度的电感L_0和每单位长度的电容C_0之间满足关系式：$L_0C_0=\mu\varepsilon$。

方程(7－19)式和(7－20)式称为用积分量 U 和 I 表示的无损耗均匀传输线方程，又称为电报方程。它们反映了沿线电压、电流的变化规律。说明由于沿线有感应电势的存在，导致两导体间的电压随距离 z 而变化；由于沿线有位移电流存在，导致导线中的传导电流 I 随距离 z 而变化。根据推导过程，无损耗均匀传输线方程适用于任意截面的由理想导体组成的二线传输线。

根据这两个方程可以得到传输线的电路模型，如图 7－3 所示。将基尔霍夫定律应用到这个电路的回路和节点，便可得到上面两个方程。所以，从电路的观点看，传输线又称为分布参数电路，其电气性质完全由分布参数 L_0 和 C_0 来决定。L_0、C_0 称为传输线的原参数，它们可用解静态场的方法求得。

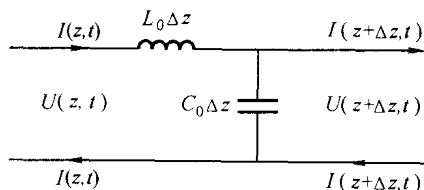


图 7－3　长度为 Δz 的双导体均匀传输线的电路模型

将(7－19)式和(7－20)式分别乘以 I 和 U 后相加，得能量守恒关系

$$\frac{\partial}{\partial z}(UI)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}C_0U^2+\frac{1}{2}L_0I^2\right)\qquad(7-21)$$

说明沿 z 方向流动的功率 UI 的增量是储存在每单位长度传输线上的电场能量 $\frac{1}{2}C_0U^2$ 和磁场能量 $\frac{1}{2}L_0I^2$ 之和的减少率。

习　题　(7－1)

7－1－1　不计边缘效应，试证明沿着两平行板，向($+z$)方向传播的沿 y 方向极化的 TEM 波具有下列性质：$\frac{\partial E_y}{\partial x}=0$ 及 $\frac{\partial H_x}{\partial y}=0$。

7－1－2　对于一沿着传输线向($+z$)方向传播的 TEM 波，其电场和磁场可能同时包含 x 和 y 两分量，此两分量可能都是 x 和 y 的函数。

(1) 试找出 $E_x(x,y)$、$E_y(x,y)$、$H_z(x,y)$ 和 $H_y(x,y)$ 彼此间的关系；

(2) 证明(1)中四个分量，在稳态情况下，均满足二维的拉普拉斯方程。

§7－2　无损耗均匀传输线的传播特性

这一节从传输线方程出发，求解满足边界条件的电压、电流波动方程，导

出传输线上的电压、电流表达式，进而分析无损耗均匀传输线的传播特性。分析结果将表明，无损耗均匀传输线导引的 TEM 波与无限大理想介质中传播的均匀平面电磁波，有许多相似的特性。

7.2.1 无损耗均匀传输线方程的瞬态解

将方程(7-19)式对空间坐标 z 求偏导数，将方程(7-20)式对时间 t 求偏导数，然后综合在一起，得

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{7-22}$$

同理，可得

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{7-23}$$

由此可见，无损耗均匀传输线的电压和电流满足波动方程。(7-22)式和(7-23)式称为无损均匀传输线的波动方程。

方程(7-22)式和(7-23)式的通解分别为

$$U(z,t) = U^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + U^-\left(t + \frac{z}{v}\right) \tag{7-24}$$

和

$$I(z,t) = I^+\left(t - \frac{z}{v}\right) + I^-\left(t + \frac{z}{v}\right) \tag{7-25}$$

上面两式和第六章中分析的均匀平面电磁波的通解完全相同。$U^+\left(t - \frac{z}{v}\right)$和$I^+\left(t - \frac{z}{v}\right)$分别表示向$(+z)$方向传播的入射电压波和入射电流波，而$U^-(t + \frac{z}{v})$和$I^-(t + \frac{z}{v})$分别表示向$(-z)$方向传播的反射电压波和反射电流波。式中 $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ 是波传播速度。

把(7-24)式代入(7-19)式中，可得电压波和电流波之间的关系为

$$I(z,t) = \frac{1}{Z_0}\left[U^+\left(t - \frac{z}{v}\right) - U^-\left(t + \frac{z}{v}\right)\right] \tag{7-26}$$

式中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{7-27}$$

称为无损耗均匀传输线的特性阻抗。它的物理意义和均匀平面电磁波中的完全相同，反映了入射波或反射波中电压和电流之间的关系。

上面的分析表明：均匀传输线中的电压波和电流波沿线的传播特性和均匀

平面电磁波的传播特性相似，因此第六章中的一些结论和分析方法可以应用于传输线。下面将着重分析传输线上的正弦电压波和电流波的传播特性。

7.2.2　无损耗均匀传输线方程的正弦稳态解

若电压 $U(z,t)$和电流 $I(z,t)$随时间作正弦变化，方程(7－22)式和(7－23)式可分别用复数形式表示为

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{U}}{\mathrm{d}z^2}=-\omega^2L_0C_0\dot{U}=k^2\dot{U} \tag{7-28}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{I}}{\mathrm{d}z^2}=-\omega^2L_0C_0\dot{I}=k^2\dot{I} \tag{7-29}$$

式中

$$k=\mathrm{j}\omega\sqrt{L_0C_0}=\mathrm{j}\beta \tag{7-30}$$

方程(7－28)式和(7－29)式的通解分别为

$$\dot{U}(z)=\dot{U}^+\mathrm{e}^{-kz}+\dot{U}^-\mathrm{e}^{kz} \tag{7-31}$$

$$\dot{I}(z)=\dot{I}^+\mathrm{e}^{-kz}+\dot{I}^-\mathrm{e}^{kz} \tag{7-32}$$

上面两式中 $\dot{U}^+$和 $\dot{I}^+$分别为向$(+z)$方向传播的入射电压波和电流波的复振幅，而 $\dot{U}^-$和 $\dot{I}^-$分别为向$(-z)$方向传播的反射电压波和电流波的复振幅。k称为传播常数，β称为相位常数。

将(7－31)式代入(7－19)式的相应复数形式中，可得电压波和电流波之间的关系

$$\dot{I}(z)=\frac{1}{Z_0}(\dot{U}^+\mathrm{e}^{-kz}-\dot{U}^-\mathrm{e}^{kz}) \tag{7-33}$$

因此，有

$$\frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+}=Z_0 \quad 和 \quad \frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-}=-Z_0 \tag{7-34}$$

式中 $Z_0=\sqrt{\dfrac{L_0}{C_0}}$。

将(7－30)式代入(7－31)式和(7－33)式，有

$$\dot{U}(z)=\dot{U}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\dot{U}^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \tag{7-35}$$

$$\dot{I}(z)=\frac{\dot{U}^+}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\frac{\dot{U}^-}{Z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z} \tag{7-36}$$

式中 $\dot{U}^+$和 $\dot{U}^-$是由传输线的始端和终端条件决定的积分常数。现选取传输线终端为坐标原点，z 坐标的正方向自传输线的始端指向终端，如图 7－4 所示，

即沿线坐标取负值。下面讨论不同边界条件下传输线方程的解。

(1) 已知始端电压 $\dot{U}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$ 时的解

将 $z=-l$ 及 $\dot{U}(-l)=\dot{U}_1$，$\dot{I}(-l)=\dot{I}_1$代入(7-35)式和(7-36)式，有

$$\dot{U}_1=\dot{U}^+ e^{j\beta l}+\dot{U}^- e^{-j\beta l}$$

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}^+ e^{j\beta l}}{Z_0}-\frac{\dot{U}^- e^{-j\beta l}}{Z_0}$$

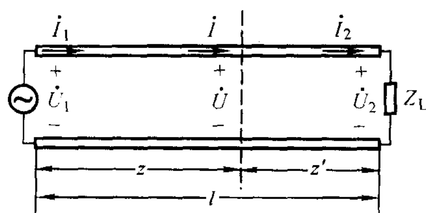


图 7-4　由已知的始端(或终端)电压和电流确定积分常数

联立解上列两式，得

$$\dot{U}^+=\frac{1}{2}(\dot{U}_1+Z_0\dot{I}_1)e^{-j\beta l}$$

$$\dot{U}^-=\frac{1}{2}(\dot{U}_1-Z_0\dot{I}_1)e^{j\beta l}$$

将求得的积分常数值 $\dot{U}^+$ 和 $\dot{U}^-$ 代入(7-35)式和(7-36)式，并整理之，可分别得电压、电流的沿线分布为

$$\dot{U}(z)=\dot{U}_1\cos\beta(l+z)-jZ_0\dot{I}_1\sin\beta(l+z) \tag{7-37}$$

$$\dot{I}(z)=\dot{I}_1\cos\beta(l+z)-j\frac{\dot{U}_1}{Z_0}\sin\beta(l+z) \tag{7-38}$$

(2) 已知终端电压 $\dot{U}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$ 时的解

将 $z=0$，及 $\dot{U}(0)=\dot{U}_2$，$\dot{I}(0)=\dot{I}_2$ 代入(7-35)式和(7-36)式，有

$$\dot{U}_2=\dot{U}^++\dot{U}^-$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}^+}{Z_0}-\frac{\dot{U}^-}{Z_0}$$

联立解上列两式，得

$$\dot{U}^+=\frac{1}{2}(\dot{U}_2+Z_0\dot{I}_2)$$

$$\dot{U}^-=\frac{1}{2}(\dot{U}_2-Z_0\dot{I}_2)$$

因此，分别得电压、电流的沿线分布为

$$\dot{U}(z)=\dot{U}_2\cos\beta z-jZ_0\dot{I}_2\sin\beta z \tag{7-39}$$

$$\dot{I}(z)=\dot{I}_2\cos\beta z-j\frac{\dot{U}_2}{Z_0}\sin\beta z \tag{7-40}$$

(7-37)式和(7-38)式就是已知始端电压和电流计算距传输线终端 z 处

的电压和电流的一般公式。而(7－39)式和(7－40)式则是已知终端电压和电流计算距传输线终端 z 处的电压和电流的一般公式。

例 7－1　无损耗平行板传输线，板间介质厚度为 0.4 mm，相对介电常数为 2.25。若传输线的特性阻抗是 50 Ω，试：(1)决定板的宽度；(2)决定传输线的 L_0，C_0，(3)求波的相位速度。

解：设板的宽度为 W，C_0 由静电场求得

$$C_0 = \frac{\varepsilon W}{d} \qquad L_0C_0 = \mu\varepsilon \qquad L_0 = \frac{\mu\varepsilon}{\varepsilon W/d} = \frac{\mu d}{W}$$

由(7－27)式，得

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{d}{W}$$

(1) 极板宽度

$$W = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{d}{Z_0} = \frac{377 \times 0.4 \times 10^{-3}}{50 \times \sqrt{2.25}} = 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

(2) L_0 和 C_0 分别为

$$L_0 = \frac{\mu d}{W} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.4}{2} = 2.51 \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon W}{d} = \frac{10^{-9} \times 2.25}{36\pi} \times \frac{2}{0.4} = 99.5 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

(3) 相位速度

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{2.25}} = \frac{3 \times 10^8}{1.5} = 2 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

习　题　(7－2)

7－2－1　一无损耗的平板传输线，其特性阻抗固定。

(1) 在板宽 W 一定时，若介电常数 ε_r 加倍，介质厚度 d 会如何变化?

(2) 在 d 一定下，若 ε_r 加倍，W 会如何变化?

(3) 在 ε_r 一定下，若 d 加倍，W 会如何变化?

(4) 在(1)、(2)、(3)的情形下，沿线波的传播速度如何变化?

7－2－2　利用 $\varepsilon_r = 2.25$ 的介质来制造一无损耗均匀传输线，(1)若为二线传输线，导线半径为 0.6 mm，则两线间距离需为多少，方能使特性阻抗为 300 Ω? (2)若为同轴电缆，内导体半径为 0.6 mm，则外导体半径需为多少方能使特性阻抗为 75 Ω?

7－2－3　设有一无损耗的同轴电缆长为 10 m，内外导体间的电容为 600 pF。设电缆的一端短路，另一端接有一脉冲发生器及示波器，则发现一个脉冲信号来回一次需时 0.1

μs，问该电缆的特性阻抗 Z_0 是多少？

§7-3 无损耗传输线中波的反射和透射

从上一节中传输线方程的通解看出，传输线上的电压波和电流波一般为相应的入射波和反射波的迭加。反射波的存在是当入射波沿线传输到不均匀处时，由于发生反射和透射现象所引起的。常见的不均匀处有：在接有阻抗值不同于传输线特性阻抗的负载处，和两对特性阻抗值不同的传输线的联接处。下面首先分析传输线不均匀处的反射和透射问题，最后讨论传输线的工作状态。

7.3.1 反射系数和透射系数

传输线上某点的反射波电压与入射波电压的比值，称为该点处的电压反射系数并用 Γ_z 表示。两对均匀传输线的联接点处的透射波电压和入射波电压的比值，称为传输线的电压透射系数并用 τ 表示。

设特性阻抗为 Z_0 的传输线终端 $z=0$ 处接有负载 Z_L，如图7-5(a)所示。根据(7-35)式和(7-36)式，负载处的电压和电流分别为

$$\dot{U}(0)=\dot{U}^{+}+\dot{U}^{-}$$

$$\dot{I}(0)=\frac{\dot{U}^{+}}{Z_0}-\frac{\dot{U}^{-}}{Z_0}$$

在负载 Z_L 上电压和电流满足关系

$$Z_L=\frac{\dot{U}(0)}{\dot{I}(0)}=Z_0\frac{\dot{U}^{+}+\dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+}-\dot{U}^{-}}$$

由此可得负载端的电压反射系数为

$$\Gamma_L=\frac{\dot{U}^{-}}{\dot{U}^{+}}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}=|\Gamma_L|e^{j\varphi_L} \tag{7-41}$$

Γ_L 是一个复数，与 Z_0 和 Z_L 有关。

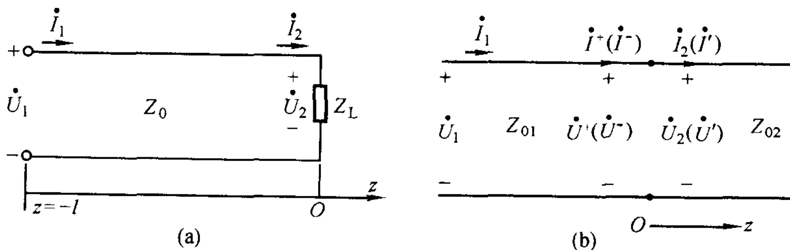


图7-5 无损耗传输线中波的反射和透射

根据定义，传输线上任一点处的反射系数为

$$\Gamma_z = \frac{\dot{U}^- e^{j\beta z}}{\dot{U}^+ e^{-j\beta z}} = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} e^{2j\beta z} = |\Gamma_L| e^{j(2\beta z + \varphi_L)} = |\Gamma_L| e^{j\varphi_z} \quad (7-42)$$

显然沿线反射系数 Γ_z 的模不变，Γ_z 落后于 Γ_L 的相位角是 $2\beta z$，即

$$\varphi_z - \varphi_L = 2\beta z \quad (7-43)$$

(7－41)式所表达的关于反射系数的关系，同样适用于图 7－5 (b)所示两对均匀传输线的联接处。设第一对传输线的特性阻抗为 Z_{01}，则沿线电压和电流分布为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta_1 z} + \dot{U}^- e^{j\beta_1 z} \quad (7-44)$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}^+ e^{-j\beta_1 z} + \dot{I}^- e^{j\beta_1 z} = \frac{\dot{U}^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 z} - \frac{\dot{U}^-}{Z_{01}} e^{j\beta_1 z} \quad (7-45)$$

设第二对(特性阻抗为 Z_{02})传输线无限长，因此，没有反射波，则沿线的电压、电流分布为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}' e^{-j\beta_2 z} \quad (7-46)$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}' e^{-j\beta_2 z} = \frac{\dot{U}'}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 z} \quad (7-47)$$

式中 $\dot{U}'$ 和 $\dot{I}'$ 为 $z=0$ 处的透射波电压和透射波电流。

根据两对均匀传输线联接处($z=0$ 处)的边界条件，应有

$$\dot{U}^+ + \dot{U}^- = \dot{U}' \quad (7-48)$$

$$\dot{I}^+ + \dot{I}^- = \dot{I}' \quad 或 \quad \frac{\dot{U}^+}{Z_{01}} - \frac{\dot{U}^-}{Z_{01}} = \frac{\dot{U}'}{Z_{02}} \quad (7-49)$$

联立求解上列两式，得反射系数为

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}} \quad (7-50)$$

而透射系数为

$$\tau = \frac{\dot{U}'}{\dot{U}^+} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}} \quad (7-51)$$

分别将 $\dot{U}^- = \Gamma_L \dot{U}^+$ 和 $\dot{U}' = \tau \dot{U}^+$ 代入(7－44)式、(7－45)式和(7－46)式、(7－47)式，得第一对线上的电压和电流

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma_L e^{j\beta_1 z}) = \dot{U}^+ e^{-j\beta_1 z} (1 + \Gamma_L e^{2j\beta_1 z}) \quad (7-52)$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^+}{Z_{01}} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma_L e^{j\beta_1 z}) = \frac{\dot{U}^+}{Z_{01}} e^{-j\beta_1 z} (1 - \Gamma_L e^{2j\beta_1 z}) \quad (7-53)$$

和第二对线上的电压和电流

$$\dot{U}(z) = \tau \dot{U}^{+} e^{-j\beta_2 z} \tag{7-54}$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}' e^{-j\beta_2 z} = \tau \frac{\dot{U}^{+}}{Z_{02}} e^{-j\beta_2 z} \tag{7-55}$$

可见，传输线上任意点处的电压和电流都可通过反射系数或透射系数来计算。

7.3.2 传输线工作状态的分析

从上面的讨论可知，传输线的工作状态，也就是入射波和反射波的关系完全取决于传输线终端所接的负载。接入不同负载阻抗(反射系数不同)，传输线上将出现行波、驻波和行驻波三种不同的工作状态。

1. 行波状态

行波状态即传输线上无反射波出现，只有入射波的工作状态。显然，此时反射系数 $\Gamma_L=0$。欲使传输线上不出现反射波，有两种情况可以满足：(1)传输线为无限长，此时表示反射波的第二项消失了，线上只存在入射波；(2)传输线终端所接负载的阻抗值等于其特性阻抗，即 $Z_L=Z_0$，这是一种特殊情况，称为匹配。此时，沿传输线上的电压和电流分别为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^{+} e^{-j\beta z} \tag{7-56}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_0} e^{-j\beta z} \tag{7-57}$$

分析可看出，行波状态下的无损耗均匀传输线有以下特点：(1)沿线电压、电流振幅不变；(2)沿线任意点处的电压、电流同相位；(3)从能量的观点来看，从电源送往负载的能量全部被负载吸收，传输线的传输效率最高。因此，行波状态是传输能量所希望的一种工作状态。

2. 驻波状态

驻波状态是指传输线上出现全反射现象，反射波与入射波迭加形成驻波。由(7-41)式可看出，当 $Z_L=0$ 或 $Z_L=\infty$ 或 $Z_L=\pm jX$ 时，$|\Gamma_L|=1$，即当传输线终端短路或开路或接纯电抗性负载时，都将产生全反射。下面将仅以 $Z_L=0$ 的终端短路传输线为例，说明传输线工作于驻波状态时的特性。

当终端短路时，可将 $Z_L=0$ 代入(7-41)式，即得负载端的反射系数 $\Gamma_L=-1$。这时，沿线电压、电流分布的复数形式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^{+}(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -j2\dot{U}^{+}\sin\beta z \tag{7-58}$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}^{+}}{Z_0}(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = \frac{2\dot{U}^{+}}{Z_0}\cos\beta z \tag{7-59}$$

式中积分常数 $\dot{U}^+$ 可用始端电压(或终端电压)确定。设 $\dot{U}^+$ 的幅角为零，则电压、电流的瞬时表达式为

$$U(z,t) = 2\sqrt{2}U^+ \sin\beta z\cos(\omega t - 90^\circ) \tag{7-60}$$

$$I(z,t) = \frac{2\sqrt{2}}{Z_0}U^+ \cos\beta z\cos\omega t \tag{7-61}$$

(7－60)式、(7－61)式分别和(6－86)式、(6－87)相似，这表明沿线的电压 U、电流 I 都是驻波。它们由反射波和入射波合成。图 7－6 画出了电压和

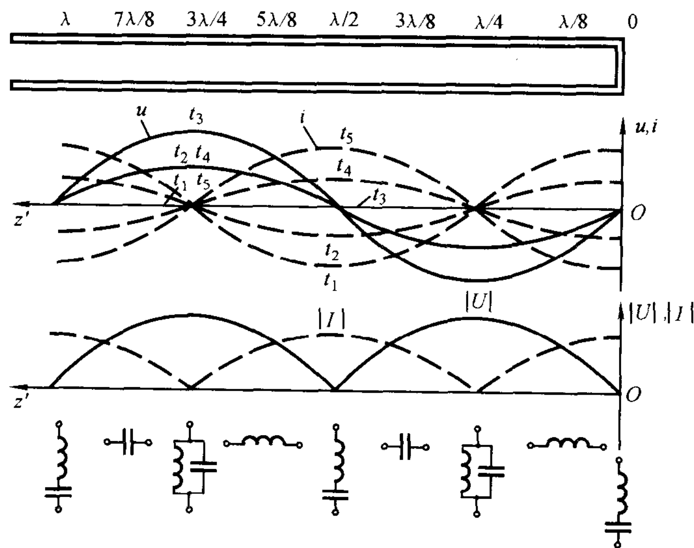


图 7－6　终端短路时传输线上的电压和电流驻波

电流沿线的瞬时分布曲线和振幅分布曲线。分析可见，驻波状态下的无损耗均匀传输线有以下特点：

(1) 传输线上电压和电流的振幅都是位置的函数，出现最大值(波腹点)和零值(波节点)。

在 $\beta z = -n\pi$，即 $z = -\dfrac{n\lambda}{2}$　$(n=0,1,2,\cdots)$处为电压的波节点，或电流的波腹点；而在 $\beta z = -\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$，即 $z = -\dfrac{(2n+1)\lambda}{4}$　$(n=0,1,2,\cdots)$处为电压的波腹点，或电流的波节点。由此可见，电压波和电流波的波膜点(或波节点)分布在空间相差 $\lambda/4$。

(2) 电压波和电流波都是振幅沿 z，且呈正弦变化的振动，表现为两相邻波节点之间的电压(或电流)随时间作同相振动，而波节点两侧的电压(或电流)

作反相振动。

(3) 传输线上各点的电压和电流在时间上有90°的相位差，故传输线上不发生能量传输过程。这说明入射波所携带的能量全部被反射回去。考虑到负载端短路(即没有负载)，这是很明显的。沿线只有在电压与电流波节点间 $\lambda/4$ 空间范围内，电能与磁能随时间的推移不断互相交换。

对于终端开路或接纯电抗负载的情况，传输线上的驻波特性与终端短路时是相同的，区别只是波腹点和波节点在线上的位置不同。这里不再详细讨论。

3. 行驻波状态

当传输线终端所接的负载阻抗 Z_L 不等于特性阻抗 Z_0 时，负载端的反射系数满足 $0<|\Gamma_L|<1$，这个条件表示负载端发生反射但非全反射。线上一部分入射波和反射波合成而形成驻波，其余部分仍为行波，这时传输线的工作状态称为行驻波状态，沿线电压和电流分布分别由(7-52)式和(7-53)式给出。它们也可改写成

$$\begin{aligned}\dot{U}(z) &= \dot{U}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\dot{U}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}+\dot{U}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\dot{U}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\\ &= (\dot{U}^{+}-\dot{U}^{-})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\dot{U}^{-}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z})\\ &= (1-\Gamma_L)\dot{U}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+2\dot{U}^{-}\cos\beta z \end{aligned} \tag{7-62}$$

$$\dot{I}(z) = (1-\Gamma_L)\frac{\dot{U}^{+}}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\mathrm{j}\frac{2\dot{U}^{-}}{Z_0}\sin\beta z \tag{7-63}$$

以上表达式右边第一项为行波部分(振幅与 z 无关)，第二项为驻波部分。在行驻波状态下，$U(z,t)$和 $I(z,t)$的沿线分布仍为波动形式，如图7-7所示。图中表示三个不同时刻电压波、电流波的分布，三条曲线的振幅各不相同。图7-7中的最下面部分表示电压、电流有效值的沿线分布，它们在最大值和最小值之间波动。

为了定量描述传输线上的行波分量和驻波分量，与第六章介绍过的相同，通常，除了用反射系数 Γ_L 表示反射波的大小以外，还可用驻波比 S 表示。S 定义为

$$S=\frac{U_{\max}}{U_{\min}}=\frac{U^{+}+U^{-}}{U^{+}-U^{-}}=\frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \tag{7-64}$$

当 $\Gamma_L=0$ 时，$S=1$，表示传输线处于匹配状态，无反射波。这时沿线各处电压的有效值都相等。当 $|\Gamma_L|=1$ 时，$S=\infty$，表示全反射。这时，沿线出现的电压波节值为 $U_{\min}=0$，同时沿线出现的电压波腹值为 $U_{\max}=2U^{+}$。

当 $0<|\Gamma_L|<1$ 时，$1<S<+\infty$，表示有反射波但反射波小于入射波。传输线上入射波电压和反射波电压相位相同的点处，它们直接相加，出现电压最大值；而相位相反的点处，出现电压最小值。沿线出现的相邻两个最大值点

(或最小值点)的距离等于半个波长 $\lambda/2$；最大值和相邻最小值点之间的距离为 $\lambda/4$。另外，由线上电压分布 $\dot{U}(z)=\dot{U}^{+}e^{-j\beta z}+\Gamma_L\dot{U}^{+}e^{j\beta z}=\dot{U}^{+}e^{-j\beta z}(1+|\Gamma_L|e^{j\varphi_L}e^{j2\beta z})$ 看出，当

$$2\beta z+\varphi_L=0$$

即

$$z=-\frac{\varphi_L}{2\beta}=-\frac{\lambda}{4\pi}\varphi_L \tag{7-65}$$

时，该处出现电压最大值。式中 φ_L 是负载端反射系数的幅角。考虑到沿线 z 坐标取负值，那么，$|z|_{max}=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi_L$ 表示对应于某一负载下的 φ_L 值时，负载与出现第一电压最大值处的距离。显然，负载端与出现第一个电压最小值处的距离为

$$|z|_{min}=\frac{\lambda}{4\pi}\varphi_L+\frac{\lambda}{4} \tag{7-66}$$

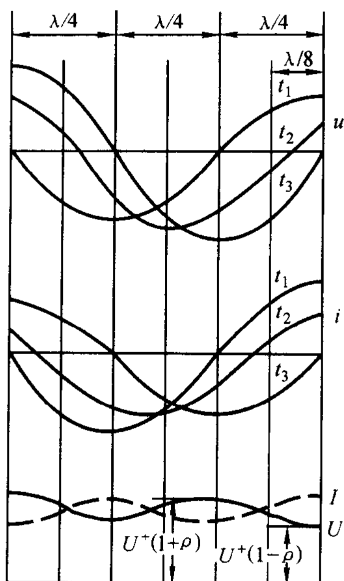


图 7-7　行驻波状态下沿线电压、电流分布

根据以上分析，可从实验数据中计算出传输线中电磁波的波长、信号源的频率及负载阻抗等。由相邻两个最小值读数之间的距离 $|\Delta z|$ 可得出波长 $\lambda=2|\Delta z|$；又可从 $\lambda f=v$ 中算出频率 $f=v/\lambda$。根据电压表的最大读数和最小读数计算出驻波比 $S=\frac{U_{max}}{U_{min}}$，由(7-64)式可算出反射系数的绝对值

$$|\Gamma_L|=\frac{S-1}{S+1} \tag{7-67}$$

再根据测量值 $|z|_{min}$ 按(7-66)式计算出 Γ_L 的幅角 φ_L。最后，由

$$Z_L=Z_0\frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} \tag{7-68}$$

得出负载阻抗 Z_L。式中的特性阻抗 Z_0 既可事先计算也可进行测量。

在图 7-8 中，画出了传输线终端接有不同的纯电阻负载 R 时，电压有效值的沿线分布，这些曲线是通过实验测定的。可以看出，对纯电阻负载情况，负载端必是电压的最大值(电流最小值)之处，或是电压的最小值(电流最大值)之处。

例 7-2　根据图 7-8 上 $R/Z_0=0.5$ 那条曲线所示的数据，计算传输线

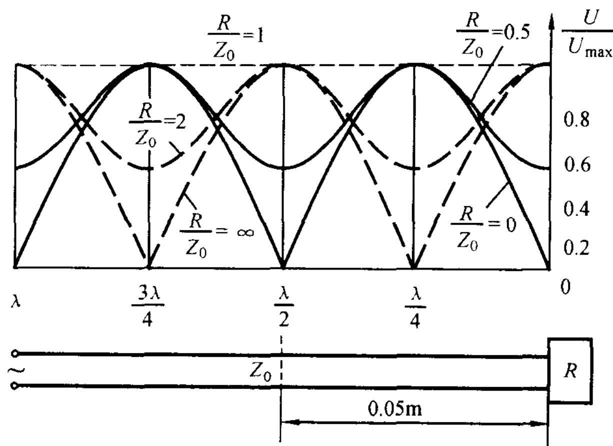


图 7-8 不同电阻负载时，电压有效值的沿线分布

中电磁波的波长、信号源频率及负载电阻 R。设已知 $Z_0=400\ \Omega$。

解：两相邻 U_{min}点之间的距离$\Delta z=0.05$ m，所以电磁波的波长为

$$\lambda = 2|\Delta z| = 0.1\text{ m}$$

信号源频率

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{0.1} = 3000\text{ MHz}$$

根据 $U_{max}/U_{min}=S$ 及 $U_{min}/U_{max}=0.5$，可得驻波比

$$S = \frac{U_{max}}{U_{min}} = 2$$

反射系数的绝对值为

$$|\Gamma_L| = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

将$|z|_{min}=0$ 代入(7-66)式，有

$$\varphi_L = -\pi$$

反射系数为

$$\Gamma_L = \frac{1}{3}\text{e}^{-j\pi}$$

得负载电阻

$$R = Z_0\frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_L} = 400\times\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = 200\ \Omega$$

7.3.3　传输线的传输功率

无损耗均匀传输线上任一点传输的功率 P，可由下式计算

$$P = \mathrm{Re}[\dot{U}(z)\dot{I}^*(z)]$$

考虑到沿线 $\dot{U}(z)=\dot{U}^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\dot{U}^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$ 和 $\dot{I}(z)=\dfrac{\dot{U}^+}{Z_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\dfrac{\dot{U}^-}{Z_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$，故

$$P = \frac{(U^+)^2}{Z_0} - \frac{(U^-)^2}{Z_0} \tag{7-69}$$

式中右边第一项表示入射波输送的功率，第二项表示反射回电源的功率。

当负载匹配($\Gamma_L=0$)时，传输功率为

$$P = \frac{(U^+)^2}{Z_0} = \frac{U_2^2}{Z_0} \tag{7-70}$$

式中 U_2 是负载上的电压。上式即为负载吸收的功率，在电力工程中也称传输线的自然功率。这种运行状态称为输送自然功率状态。工程上都希望传输线尽可能工作在自然状态(也称匹配状态)。

习　题　(7－3)

7－3－1　一无损耗传输线，特性阻抗为 75 Ω，终端接有负载 $Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L$。

(1) 要使沿线驻波比为 3，求 R_L 与 X_L 的关系；

(2) 若 $R_L=150$ Ω，求 X_L；

(3) 在(2)情况下，求离负载最近的电压最小点距负载的距离。

7－3－2　一特性阻抗为 300 Ω 的无损耗均匀传输线，终端接一未知负载，测得驻波比为 2，离负载 0.3λ 处为第一个电压最小点，求：

(1) 负载端反射系数；

(2) 负载 Z_L。

7－3－3　一无损耗均匀传输线的特性阻抗 $Z_0=75$ Ω，终端接负载阻抗 $Z_L=(100-\mathrm{j}50)$Ω,求：

(1) 传输线上的反射系数 Γ_z；

(2) 传输线上的电压、电流表示式；

(3) 距离负载第一个电压波节点和电压波腹点的距离 $|z|_{\min1}$ 和 $|z|_{\max1}$。

§7－4　无损耗传输线的入端阻抗

在分析电源分配给传输线输入端的电压、电流；沿线的电压和电流分布及

负载吸收功率等问题时，引入传输线的入端阻抗概念往往可以使问题简化。由于传输线上的电压波和电流波的分布不仅是时间和线段长度的函数，而且与传输线终端负载有关，这使传输线的入端阻抗有其特有的变化规律，掌握这些变化规律是很有用的。本节分别讨论无损耗均匀传输线在不同负载情况下的入端阻抗。

7.4.1 入端阻抗

传输线入端阻抗定义为，输入端的电压相量和电流相量的比值，记作 Z_{in}。前面已经提到传输线上一般存在入射波和反射波，因此这里的电压和电流是指输入端的总电压和总电流。

根据入端阻抗 Z_{in}的定义，设传输线的长度为 l，如图 7-9 所示，把 $z=-l$ 代入(7-39)式和(7-40)式，然后两式左右两边相除及 $\dot{U}_2/\dot{I}_2=Z_L$ 代入，经整理后，有

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=Z_0\frac{Z_L\cos\beta l+jZ_0\sin\beta l}{Z_0\cos\beta l+jZ_L\sin\beta l}$$

$$=Z_0\frac{Z_L+jZ_0\tan\frac{2\pi}{\lambda}l}{Z_0+jZ_L\tan\frac{2\pi}{\lambda}l} \tag{7-71}$$

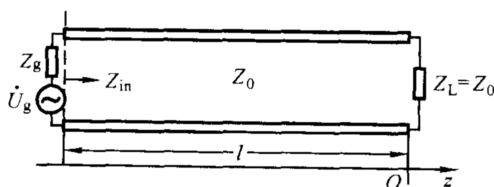


图 7-9 终端接负载的传输线

可见，入端阻抗除了和传输线的特性阻抗 Z_0 及工作频率有关外，还和传输线的长度 l 及终端负载 Z_L 有关。Z_{in}随传输线长度 l 作周期变化，每增长二分之一波长，Z_{in}重复出现一次，即 $Z_{in}\left(l+\frac{n\lambda}{2}\right)=Z_{in}(l)$。

7.4.2 几种不同负载条件下入端阻抗的变化规律

1. 终端接匹配负载

这时 $Z_L=Z_0$，由(7-71)式得

$$Z_{in}=Z_0$$

上式表明，当负载阻抗和特性阻抗相等时，传输线的入端阻抗和特性阻抗相等，且与线长 l 无关。也即沿线各处的入端阻抗都和特性阻抗相等。

2. 终端短路

此时 $Z_L=0$，由(7－71)式得

$$Z_{in} = jZ_0\tan\frac{2\pi}{\lambda}l = jX_i \tag{7-72}$$

上式表明，一段终端短路的无损耗均匀传输线的入端阻抗 Z_{in}具有纯电抗性质。电抗的性质和大小，随线的长度 l 变化，如图 7－10 (a)所示。当 $l<\lambda/4$ 时，Z_{in}随 l 增大而增加且呈感性；当 $\lambda/4<l<\lambda/2$ 时，Z_{in}随 l 增大而减小且呈容性；当 $l=\lambda/4$ 时，入端阻抗为∞，表现为 LC 并联谐振性质；当 $l=\lambda/2$ 时，入端阻抗为 0，表现为 LC 串联谐振性质。线长 l 每增加半个波长，入端阻抗的性质重复一次。图 7－10 (b)给出了不同线长 l 时传输线的电路模型。

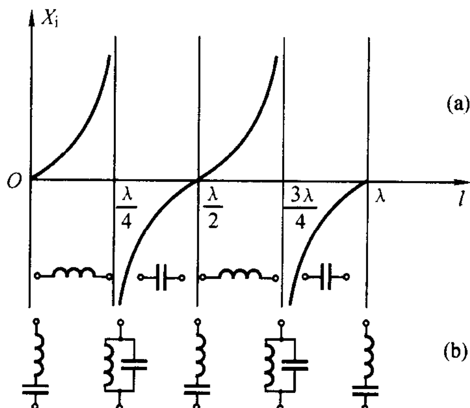


图 7－10 终端短路线的入端阻抗

在实际应用中，可用短于四分之一波长的终端短路线实现超高频的电感元件，用等于四分之一波长的短路线作为理想的并联谐振电路。

3. 终端开路

此时 $Z_L=\infty$，由(7－71)式得

$$Z_{in} = -jZ_0\cot\frac{2\pi}{\lambda}l = jX_i \tag{7-73}$$

可见，同终端短路时一样，入端阻抗 Z_{in}仍然是呈电抗性质。它可以是电感性的，也可以是电容性的，由$\frac{2\pi}{\lambda}l$ 的值而定。图 7－11 示出了 X_i 随 l 变化的曲线。从图中看出，表现为感性和容性的线长范围恰与短路时相反。比较

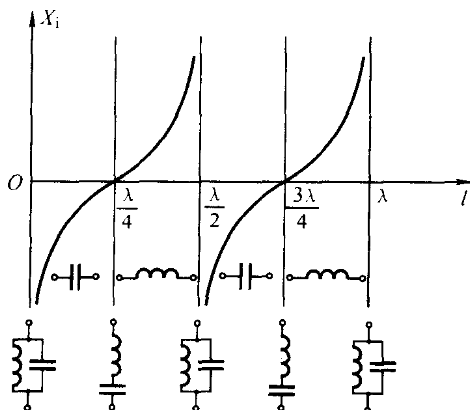


图 7-11 终端开路线的入端阻抗

图 7-10和图 7-11 可见，l 长的开路线的入端阻抗等于$(l+\frac{\lambda}{4})$长的短路线的入端阻抗。

在实际应用中，可用短于四分之一波长的终端开路线实现超高频的电容元件，用等于四分之一波长的开路线作为理想的串联谐振电路。

4. 终端接电抗性负载

终端接电抗性负载，即 $Z_L=jX$。这时，在终端短路或开路传输线的电抗分布图上，总可以在适当的位置找到等于 X 的电抗值，由此向前延长 l 长度处，就可得到终端接纯电抗时传输线的入端阻抗。

5. 终端接纯电阻负载

终端接纯电阻负载，即 $Z_L=R_L$，线上呈现行驻波。这时，终端是电压的最大值之点或是最小值之点。当 $R_L<Z_0$ 时，终端为电压的最小值之点；当 $R_L>Z_0$ 时，终端为电压的最大值之点。图 7-8 表示不同电阻负载时，传输线上电压有效值的分布。负载电阻和传输线驻波比的关系为：当 $R<Z_0$，$R_L=\frac{Z_0}{S}$；当 $R>Z_0$，$R_L=SZ_0$。

例 7-3 一特性阻抗为 500 Ω 的传输线，由 $f=1.5$ MHz 的正弦电源供电，终端负载为 $C=200$ pF 的电容器，试求：(1)终端到距离终端最近的电压波腹点及电压波节点的距离；(2)若电容器上的电压有效值 $U_C=400$ V，计算波腹电压和波腹电流的有效值。

解：波长 $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{3\times10^8}{1.5\times10^6}=200$ m

（1）由于短于 $\lambda/4$ 的开路线可等效为电容，所以终端接电容负载的传输线可看成是延长了一段长度 l 后的开路线，沿线电压、电流分布如图 7－12 所示，根据(7－73)式，有

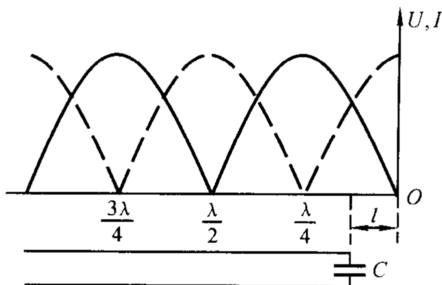


图　7－12

$$-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = -\mathrm{j}Z_0\cot\frac{2\pi}{\lambda}l$$

所以得

$$l = \frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{1}{\omega CZ_0}\right)$$

$$= \frac{200}{2\pi}\operatorname{arc\,cot}\left(\frac{1}{2\pi\times1.5\times10^6\times200\times10^{-12}\times500}\right) = 24.058\ \mathrm{m}$$

终端到距离终端最近的电压波腹点的距离

$$l_1 = \frac{\lambda}{2} - l = 100 - 24.058 = 75.942\ \mathrm{m}$$

终端到距离终端最近的电流波腹点的距离

$$l_2 = \frac{\lambda}{4} - l = 50 - 24.058 = 25.942\ \mathrm{m}$$

（2）波腹电压也就是开路线终端电压，由(7－39)式

$$\dot{U}_C = \dot{U}_2\cos\beta z - 0 = \dot{U}_2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\times(-24.058)\right] = 400$$

$$|\dot{U}_2| = \frac{400}{\cos 17.433^\circ} = 549.662\ \mathrm{V}$$

波腹电流距离终端 $\lambda/4$ 处

$$\dot{I} = 0 - \mathrm{j}\frac{\dot{U}_2}{Z_0}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\times\left(-\frac{\lambda}{4}\right)\right]$$

$$|\dot{I}| = \frac{|\dot{U}_2|}{Z_0} = \frac{549.662}{500} \approx 1.099\ \mathrm{A}$$

例 7－4　一特性阻抗为 50 Ω 的无损耗传输线上接一未知负载阻抗，其驻波比为 3.0。两相邻电压最小值之间的距离是 20 cm，且第一个最小值距离负载端是 5 cm，决定负载阻抗。

解：两相邻电压最小值之间的距离是半波长，所以

$$\lambda = 2\times0.2 = 0.4\ \mathrm{m},\qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi\ \mathrm{rad/m}$$

根据上面对于终端接纯电阻负载的讨论，容易知道，电压最小点处的入端阻抗为一纯电阻，而且有

$$R = \frac{Z_0}{S} = \frac{50}{3} = 16.7\ \Omega$$

又根据传输线长度每增加二分之一波长，Z_{in}重复出现一次，容易知道，负载阻抗可看成是与 R 相距$\frac{\lambda}{2} - 0.05 = 0.15$ m 处的入端阻抗，根据(7－71)式

$$Z_{in} = Z_L = Z_0 \frac{R + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jR \tan \beta l}$$

$$= 50 \frac{\frac{50}{3} + j50 \tan(5\pi \times 0.15)}{50 + j\frac{50}{3}\tan(5\pi \times 0.15)} = (30 - j40)\ \Omega$$

例 7－5　长度为 $l = 1.5$ m 的无损耗传输线(设 $l < \lambda/4$)，当其终端短路时，测得入端阻抗 $Z_{ins} = j103\ \Omega$；当其终端开路时，测得入端阻抗 $Z_{in0} = -j54.6\ \Omega$。试求该传输线的特性阻抗 Z_0 和传输常数 k。

解：根据(7－72)式和(7－73)式，得

$$Z_0 = \sqrt{Z_{ins} Z_{in0}} \qquad 和 \qquad \beta = \frac{1}{l} \arctan\left(\sqrt{-\frac{Z_{ins}}{Z_{in0}}}\right)$$

所以

$$Z_0 = \sqrt{j103 \times (-j54.6)} = 75\ \Omega$$

$$\beta = \frac{1}{1.5} \arctan\left(\sqrt{-\frac{j103}{-j54.6}}\right) = 0.628\ \text{rad/m}$$

$$k = j\beta = j0.628\ \text{rad/m}$$

这一例题表明，通过测量一段传输线在终端短路和开路情况下的入端阻抗，便可计算出该传输线的特性阻抗和传播常数。

例 7－6　特性阻抗 $Z_0 = 50\ \Omega$，长度 $l = 4$ m 的无损耗传输线，输出端接有负载 $Z_L = Z_0$，输入端接有内阻 $Z_g = R_g = 1\ \Omega$、电压为 $U_g = (0.3\sqrt{2} \cos 2\pi \times 10^8 t)$V 的电源。线上波的传播速度 $v = 2.5 \times 10^8$ m/s。试求：(1)线上的电压 $U(z, t)$和电流 $I(z, t)$分布；(2)由电源端传输到负载端的功率。

解：(1) 由电源端的等效电路(图 7－13)求出输入端的电压和电流

$$\dot{U}_{in} = \frac{Z_{in}}{Z_g + Z_{in}} \dot{U}_g = \frac{50}{1 + 50} 0.3\, e^{j0^\circ} = 0.294\ \text{V}$$

$$\dot{I}_{\text{in}} = \frac{1}{Z_{\text{g}} + Z_{\text{in}}}\dot{U}_{\text{g}} = \frac{1}{1+50}0.3\ \text{e}^{\text{j}0^\circ} = 0.005\ 9\ \text{A}$$

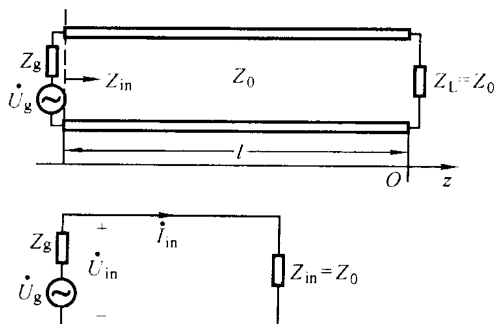


图 7-13　终端匹配及电源端的等效电路

而无损耗线上的相位常数为

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\times10^8}{2.5\times10^8} = 0.8\pi\ \text{rad/m}$$

故无损耗传输线终端的电压、电流为

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{\text{in}}\text{e}^{-\text{j}\beta l} = 0.294\text{e}^{-\text{j}0.8\pi\times4} = 0.294\ \text{e}^{-\text{j}3.2\pi}\ \text{V}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{\text{in}}\text{e}^{-\text{j}\beta l} = 0.0059\ \text{e}^{-\text{j}0.8\pi\times4} = 0.0059\ \text{e}^{-\text{j}3.2\pi}\ \text{A}$$

则线上任一点的电压、电流为

$$U(z,t) = \sqrt{2}\ 0.294\cos(2\pi\times10^8 t - 0.8\pi z - 3.2\pi)\ \text{V}$$

$$I(z,t) = \sqrt{2}\ 0.0059\cos(2\pi\times10^8 t - 0.8\pi z - 3.2\pi)\ \text{A}$$

（2）因为是无损耗线，故传输到负载的功率等于输入端的功率

$$P_{\text{L}} = P_{\text{in}} = \text{Re}[\dot{U}_{\text{in}}\dot{I}_{\text{in}}^*] = (0.294\times0.0059) = 1.735\ \text{mW}$$

习　题　(7-4)

7-4-1　一长2 m的无损耗传输线，特性阻抗为 50 Ω，一端接阻抗为$(40+\text{j}30)$Ω 的负载，在 $f=200$ MHz 时，求入端阻抗 Z_{in}。

7-4-2　特性阻抗 $Z_0=100$ Ω，长度为 $\lambda/8$ 的无损耗传输线，输出端接有负载 $Z_{\text{L}}=(200+\text{j}300)$ Ω，输入端接有内阻为 100 Ω、电压为 $500\angle0^\circ$ V 的电源。试求：

（1）传输线输入端的电压；

（2）负载吸收的平均功率；

(3) 负载端的电压。

§7-5 无损耗均匀传输线的阻抗匹配

在很多情况下，传输线的终端接有一个集中参数的负载 Z_L。当负载 Z_L 与特性阻抗 Z_0 相等时，称为传输线工作在匹配状态。这时，传输线上没有反射波，只有入射波。从能量的观点来看，这时从电源端送往负载的能量全部被负载吸收。显然，在匹配状态下，传输线的效率最高。另外，对传送信号而言，不匹配所产生的反射波还会使信号失真。因此，在实际中，传输线被用来传输电磁功率和信息时，总是希望负载与传输线的特性阻抗相匹配。

本节将针对无损耗均匀传输线讨论几种阻抗匹配的方法。

7.5.1 λ/4 阻抗变换器

可以将四分之一波长的无损耗线串联在主传输线(设它的特性阻抗为 Z_{01})和负载 R 之间(见图 7-14)，使负载 R 和主传输线的特性阻抗 Z_{01} 相匹配，所以把接入的这一段四分之一波长线称为 λ/4 阻抗变换器。

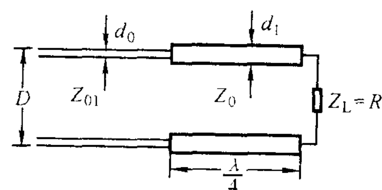
应用(7-71)式且将 $l=\lambda/4$ 代入，有

$$Z_{in} = Z_0 \frac{R + jZ_0 \tan\frac{\pi}{2}}{Z_0 + jR\tan\frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{R}$$

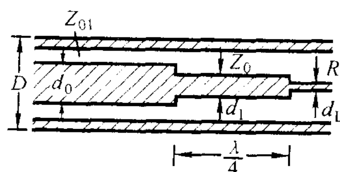
即负载阻抗经过四分之一波长的无损耗线变换到输入端后，就等于它的倒数与特性阻抗 Z_0 平方的乘积。令 $Z_{in}=Z_{01}$，便可使负载为 R 的 λ/4 的无损耗线和特性阻抗为 Z_{01} 的主传输线处于匹配状态，这样，便应取

$$Z_0 = \sqrt{RZ_{01}} \qquad (7-74)$$

(7-74)式中的 Z_{01} 和 Z_0 都是实数，因此，只有当负载阻抗为实数(即纯电阻负载)时才能使用 λ/4 阻抗变换器，以达到负载匹配的目的。然而，当负载阻抗不仅有实部，还有虚部时，则可沿主传输线向左找一位置，使该处的入端阻抗为一实数。然后把 λ/4 阻抗变换器接入该处，就可达到匹配状态。



(a) 平行双导线



(b) 同轴线

图 7-14 四分之一波长阻抗变换器

应该指出，应用上述变换器后，在特

性阻抗为 Z_{01} 的主传输线上能消除反射波，但在串接的 $\lambda/4$ 的传输线上，仍有反射波。另外，由于 $\lambda/4$ 线的长度取决于波长，故这种匹配方法对频率十分敏感，它只对一个频率点能得到理想匹配。当频率变化时，匹配将被破坏。进一步的分析表明，当频率在一定范围内变化时，要使匹配效果好，阻抗变换比 $\frac{R}{Z_{01}}\left(\text{或}\frac{Z_0}{R}\right)$ 不宜过大。如果实际的阻抗变换比很大，则可采用两节或多节 $\lambda/4$ 线逐级来实现匹配。

例 7－7　一信号发生器经一特性阻抗 $Z_0=50\ \Omega$ 的无损耗传输线，供给 $R_{L1}=64\ \Omega$ 及 $R_{L2}=25\ \Omega$ 的两电阻负载相同的功率，使用 $\lambda/4$ 阻抗变换器使负载和传输线匹配，如图 7－15 所示。(1)决定 $\lambda/4$ 线的特性阻抗；(2)求各条传输线上的驻波比。

解：(1) 匹配时，$A—A'$ 处的入端阻抗等于 50 Ω，由于供给两电阻相同的功率，所以

$$R_{i1}=R_{i2}=100\ \Omega$$

$$Z_{01}=\sqrt{R_{L1}R_{i1}}=\sqrt{100\times 64}=80\ \Omega$$

$$Z_{02}=\sqrt{R_{L2}R_{i2}}=\sqrt{100\times 25}=50\ \Omega$$

(2) 在匹配的情况下，主传输线上 $S=1$，无反射波。在两 $\lambda/4$ 线上的驻波比分别是：在特性阻抗为 Z_{01} 的 $\lambda/4$ 线上

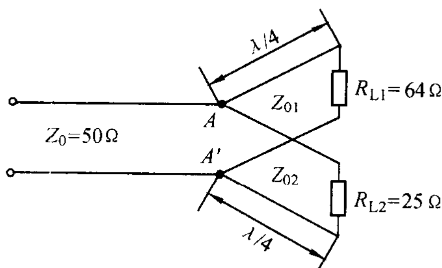


图 7－15　利用 λ/4 阻抗变换器进行阻抗匹配

$$\Gamma_1=\frac{R_{L1}-Z_{01}}{R_{L1}+Z_{01}}=\frac{64-80}{64+80}=-0.11$$

$$S_1=\frac{1+|\Gamma_1|}{1-|\Gamma_1|}=\frac{1+0.11}{1-0.11}=1.25$$

在特性阻抗为 Z_{02} 的 $\lambda/4$ 线上

$$\Gamma_2=\frac{R_{L2}-Z_{02}}{R_{L2}+Z_{02}}=\frac{25-50}{25+50}=-0.333$$

$$S_2=\frac{1+|\Gamma_2|}{1-|\Gamma_2|}=\frac{1+0.33}{1-0.33}=2.00$$

7.5.2　单短截线变换器

若要使负载阻抗 $Z_L=R_L+jX_L$ 和特性阻抗为 Z_0 的传输线相匹配，还可

利用在主传输线上并接一段特性阻抗亦为 Z_0 的单短截线来实现，如图 7-16 所示，称为单短截线阻抗匹配法。这种短接线称为单短截线变换器。为实现匹配，需要调整单短截线离开负载的距离 l_1 和短截线的长度 l_2，这时阻抗间的关系为

$$\frac{1}{Z_0}=\frac{1}{Z_{i1}}+\frac{1}{Z_{i2}} \qquad (7-75)$$

匹配分两步来实现，首先调整长度 l_1 使从 AB 向右看过去的入端阻抗 Z_{i1}满足关系

$$\frac{1}{Z_{i1}}=\frac{1}{Z_0}+\mathrm{j}B_{i1} \qquad (7-76)$$

然后调节单短截线的长度 l_2，使

$$\frac{1}{Z_{i2}}=\mathrm{j}B_{i2}=-\mathrm{j}B_{i1} \qquad (7-77)$$

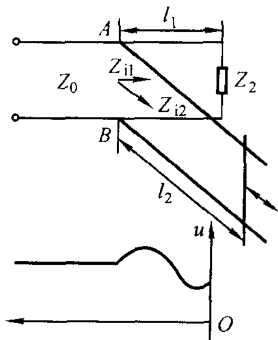


图 7-16 单短截线阻抗匹配

这样就达到了匹配，消除了从电源到并接点处的反射波，但从并接点到负载之间除了行波外尚有驻波。

单短截线阻抗匹配法实质是，用接入短截线后附加的反射波来抵消主传输线上原来的反射波，以实现匹配。这种匹配方法对频率也是十分敏感的，当频率变化时，l_1 和 l_2 都需重新调节。在工程实际应用中，还有双短截线和多短截线匹配法等。

例 7-8 特性阻抗 $Z_0=300\ \Omega$ 的无损耗均匀传输线，终端接 $Z_L=(73+\mathrm{j}42)\Omega$ 的负载。试确定用单短截线实现阻抗匹配时，所需短截线长度 l_2 和接入位置 l_1。

解：根据(7-75)式，有

$$\frac{1}{Z_0}=\frac{1}{Z_{i1}}+\frac{1}{Z_{i2}}$$

由(7-71)式，可得

$$\frac{1}{Z_{i1}}=\frac{1}{Z_0}\frac{Z_0+\mathrm{j}Z_L\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_1}{Z_L+\mathrm{j}Z_0\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_1}$$

令 $\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_1=x$，则

$$\frac{1}{Z_{i1}}=\frac{1}{300}\left[\frac{300+\mathrm{j}73x-42x}{(73+\mathrm{j}42)+300x\mathrm{j}}\right]$$

$$=\frac{1}{300}\left[\frac{(300-42x+73x\mathrm{j})(73-(300x+42)\mathrm{j})}{73^2+(300x+42)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{300}\left[\frac{(300-42x)\times 73 + 73x(300x+42)}{73^2+(300x+42)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{73^2 x\mathrm{j}-(300-42x)(300x+42)\mathrm{j}}{73^2+(300x+42)^2}\right]$$

令上式实部 $=\frac{1}{Z_0}=\frac{1}{300}$，则有

$$73(300-42x)+73x(300x+42)=73^2+(300x+42)^2$$

整理之，得

$$68100x^2+25200x-14807=0$$

解之，得

$$x=\begin{cases}0.316638615\\-0.686682668\text{（舍去）}\end{cases}$$

所以　$\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_1=0.316638615$，最后得接入位置为

$$l_1\approx 0.049\lambda$$

把 x 的值代 $\frac{1}{Z_{i1}}$ 的虚部中，得

$$\text{虚部}=\frac{1}{300}\left(\frac{-\mathrm{j}}{0.64104272}\right)$$

因为

$$\frac{1}{Z_{i2}}=\frac{1}{\mathrm{j}Z_0\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_2}$$

令 $\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_2=y$，所以　$\frac{1}{Z_{i2}}=\frac{-\mathrm{j}}{300y}$

要实现匹配，应有

$$\frac{-\mathrm{j}}{300y}=-\frac{1}{300}\left(\frac{-\mathrm{j}}{0.64104272}\right)$$

或者

$$y=-0.64104272=\tan\frac{2\pi}{\lambda}l_2$$

最后，得所需短截线长度

$$l_2\approx 0.409\lambda$$

习　题　(7－5)

7－5－1　一特性阻抗为 $Z_{01}=50\ \Omega$ 的传输线经由另一长度为 l'，特性阻抗为 Z_{02} 的传

输线达到与 $Z_L=(40+j10)\Omega$ 的负载匹配，求 l' 和 Z_{02}。

7-5-2 利用单短截线匹配法使 $(25+j25)\Omega$ 负载阻抗与 $50\ \Omega$ 无损耗均匀传输线匹配。若短截线也是相同的 $50\ \Omega$ 线，试求所需要的短截线的长度 l_2 和接入位置 l_1。

§7-6 有损耗均匀传输线

实际的传输线是有损耗的。损耗主要是传输线导体的损耗及导体之间介质的损耗，即导体本身有电阻，导体之间的介质有漏电导，这个电阻和电导如均匀连续地分布在整个传输线的长度上，则称这个传输线为有损耗均匀传输线。本节将简单介绍有损耗均匀传输线中 TEM 波的传播特性。

导体有电阻存在，意味着 E_z 必定不为零。因此严格地说，有损耗均匀传输线上的波并不是 TEM 波。然而一般 E_z 远小于横向电场，所以可将 E_z 当做一种轻微的干扰，近似认为有损耗传输线上主要传播的仍是 TEM 波。

7.6.1 有损耗均匀传输线的方程及其解

用 R_0 表示传输线每单位长度导体的电阻，它与 L_0 是串联关系。用 G_0 表示传输线每单位长度导体之间介质的漏电导，它与 C_0 是并联关系。因此有损耗均匀传输线的分布参数电路模型如图 7-17 所示。若考虑到 ΔzG_0 上的附加电流及 ΔzR_0 上的附加电压，那么在 $\Delta z\to 0$ 的极限情况下，无损耗传输线方程变为

$$\frac{\partial U}{\partial z}+L_0\frac{\partial I}{\partial t}+R_0I=0 \tag{7-78}$$

$$\frac{\partial I}{\partial z}+C_0\frac{\partial U}{\partial t}+G_0U=0 \tag{7-79}$$

这就是有损耗均匀传输线方程的一般形式。

若电压和电流随时间作正弦变化，方程(7-78)式和(7-79)式相应的复数形式为

$$\frac{\mathrm{d}\dot{U}}{\mathrm{d}z}=-(\mathrm{j}\omega L_0+R_0)\dot{I} \tag{7-80}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{I}}{\mathrm{d}z}=-(\mathrm{j}\omega C_0+G_0)\dot{U} \tag{7-81}$$

这样，不难导得电压和电流分别满足如下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{U}}{\mathrm{d}z^2}=k^2\dot{U} \tag{7-82}$$

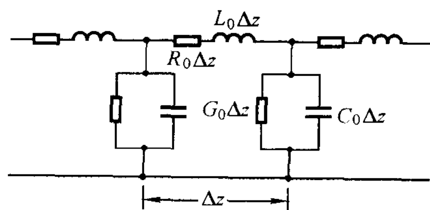


图 7-17 有损耗均匀传输线的分布参数等效电路

$$\frac{d^2\dot{I}}{dz^2}=k^2\dot{I} \tag{7-83}$$

式中

$$k=\sqrt{(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)}=\alpha+j\beta \tag{7-84}$$

称为传播常数。它们的通解为

$$\dot{U}(z)=\dot{U}^+e^{-kz}+\dot{U}^-e^{kz} \tag{7-85}$$

将(7-85)式代入(7-80)式，得

$$\dot{I}(z)=\frac{\dot{U}^+}{Z_0}e^{-kz}-\frac{\dot{U}^-}{Z_0}e^{kz} \tag{7-86}$$

式中

$$Z_0=\sqrt{\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}} \tag{7-87}$$

称为传输线的特性阻抗。式中 $\dot{U}^+$ 和 $\dot{U}^-$ 为积分常数，要根据边界条件确定。

设 $\dot{U}^+=U^+e^{j\varphi_+}$ 和 $\dot{U}^-=U^-e^{j\varphi_-}$，则电压的瞬时表达式为

$$U(z,t)=\sqrt{2}U^+e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_+)+\sqrt{2}U^-e^{\alpha z}\cos(\omega t+\beta z+\varphi_-) \tag{7-88}$$

上式和第六章中分析的导电媒质中的均匀平面电磁波完全相似。式中右边第一项表示向$(+z)$方向传播的入射波，而第二项表示向$(-z)$方向传播的反射波，但它们的振幅随着波的前进按指数规律衰减。α 描述波振幅衰减的快慢，故称为衰减常数；β 描述相位的改变率，故称为相位常数。

沿线电流的分布及其随时间变化的规律与电压完全类似。

7.6.2　均匀传输线的参数

由上面讨论知道，当传输线的传播常数 k 和特性阻抗 Z_0 确定后，沿线电压波和电流波的传播特性也就基本上得到确定。通常，把 k 和 Z_0 称为传输线的副参数，而把决定 k 和 Z_0 的参数 R_0、L_0、C_0 和 G_0 称为传输线的原参数。

原参数是组成传输线等效分布参数电路的基本量。它们由传输线的几何尺寸、相互位置及周围媒质的物理特性决定。C_0、G_0 和 L_0、R_0 可分别按静电场、恒定电场和恒定磁场中的参数计算方法求得，这里不再具体介绍。

下面讨论传输线的副参数：

1. 特性阻抗 Z_0

传输线的特性阻抗定义为行波电压与行波电流之比，由(7－85)式和(7－86)式得

$$Z_0=\frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+}\qquad 或 \qquad Z_0=-\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-}$$

(7－87)式已给出了有损耗均匀传输线的特性阻抗为

$$Z_0=\sqrt{\frac{R_0+\mathrm{j}\omega L_0}{G_0+\mathrm{j}\omega C_0}}=\sqrt[4]{\frac{R_0^2+\omega^2L_0^2}{G_0^2+\omega^2C_0^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0} \tag{7-89}$$

式中，φ_0 表示行波电压和行波电流间的相位关系。φ_0 不等于零说明电压与电流不同相，它的取值范围是 $-\pi/4\leqslant\varphi_0\leqslant\pi/4$。

对于低损耗传输线($R_0\leqslant\omega L_0, G_0\leqslant\omega C_0$)，有

$$Z_0\approx\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

可见，低损耗线与无损耗线一样，特性阻抗也是实数，仅与 L_0 和 C_0 有关，与频率无关。在微波范围内使用的传输线就属于低损耗传输线。

2. 传播常数 k

(7－84)式已给出传播常数 k 的表达式

$$\begin{aligned}k&=\alpha+\mathrm{j}\beta\\&=\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega C_0)}\end{aligned}$$

据此可求出 α 和 β 分别为

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R_0^2+\omega^2L_0^2)(G_0^2+\omega^2C_0^2)}-(\omega^2L_0C_0-R_0G_0)\right]} \tag{7-90}$$

$$\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(R_0^2+\omega^2L_0^2)(G_0^2+\omega^2C_0^2)}+(\omega^2L_0C_0-R_0G_0)\right]} \tag{7-91}$$

从以上表达式可看出，α 和 β 都是传输线分布参数和频率的复杂函数。因此，当非正弦信号在这样的传输线上传播时，必然引起信号的畸变(或失真)。一般称由于 α 随频率而变化所引起的畸变为振幅畸变；称由于 β 随频率而变化引起的畸变为相位畸变。这些显然都是通信线路中所不希望的。

对于低损耗传输线，此时 $R_0\leqslant\omega L_0$ 和 $G_0\leqslant\omega C_0$，则

$$\alpha\approx\frac{1}{2}\left(R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}+G_0\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\right)\qquad(近似为常数) \tag{7-92}$$

$$\beta\approx\omega\sqrt{L_0C_0} \tag{7-93}$$

而相速

$$v = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad \text{(近似为常数)} \tag{7-94}$$

以上各式说明，非正弦信号在低损耗传输线上传播时，畸变程度很小。

7.6.3 无畸变传输线

根据以上分析可知，一般有损耗传输线上传播的信号要发生畸变。但是，如果能使衰减常数 α 不是频率的函数，而是一个常量；相位常数 β 与 ω 成正比，即 k 具有如下的形式：

$$k = \alpha + \mathrm{j}\beta = \alpha + \mathrm{j}\omega K$$

式中 α 和 K 都是与 ω 无关的量，就可以消除有损耗传输线上的振幅畸变和相位畸变。

由(7-84)式

$$k = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)} = \sqrt{R_0 G_0}\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{j}\omega L_0}{R_0}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{j}\omega C_0}{G_0}\right)}$$

如果上式中的

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0} \tag{7-95}$$

则有

$$k = \sqrt{RG_0}\left(1 + \frac{\mathrm{j}\omega L_0}{R_0}\right) \tag{7-96}$$

可见，α 是一常数，而 β 与 ω 成正比。

当非正弦信号在满足(7-95)式所示条件的有损耗均匀传输线上传播时，可以消除振幅畸变和相位畸变，故称(7-95)式为无畸变条件。满足无畸变条件的有损耗传输线称为无畸变传输线。无损耗传输线就是一种无畸变传输线，但无畸变传输线却不一定是无损耗传输线。在没有反射波的条件下，有损耗的无畸变传输线上沿线的电压波、电流波的波形各自相同，但振幅却随着前进距离的增加而按指数规律减少，减少的速率由 $\alpha = \sqrt{R_0 G_0}$决定。

在无畸变条件下，有损耗均匀传输线的特性阻抗为

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \tag{7-97}$$

由此可见，在无畸变传输线中，沿线各处的入射电压波或反射电压波分别和电流波同相。

一般架空线或电缆线的原参数之间的关系为 $L_0/R_0 < C_0/G_0$，为了实现无畸变传输线的条件，同时又能降低振幅衰减的程度，应增大 L_0。工程中通常采用集中加感，即在传输线中每隔一定距离加入一个电感线圈以增大 L_0，为了不致破坏传输线的均匀性，电感线圈间的距离应较沿传输线传播的电磁波

的波长小得多。另一种方法是采用分布加感，即在电缆芯线表面处均匀地绕一层磁导率较大的金属带以增大 L_0。

例 7－9 特性阻抗为 50 Ω 的无畸变线的衰减常数为 1.15×10^{-3} Np/m，传输线每单位长度电容为 100 pF/m，试求：(1)传输线每单位长度的电阻、电感和电导；(2)波速；(3)电压传输至 1 km 处及 5 km 处电压振幅大小降低的百分率。

解：(1) 无畸变传输线满足

$$\frac{L_0}{R_0}=\frac{C_0}{G_0}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

$$\alpha=\sqrt{R_0G_0}=R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$$

由上述关系和 $C_0=100$ pF/m，可解得

$$R_0=\alpha Z_0=1.15\times10^{-3}\times50=0.057\ \Omega/\text{m}$$

$$L_0=C_0Z_0^2=10^{-10}\times50^2=0.25\times10^{-6}\ \text{H/m}$$

$$G_0=\frac{R_0C_0}{L_0}=\frac{R_0}{Z_0^2}=\frac{0.057}{50^2}=22.8\times10^{-6}\ \text{S/m}$$

(2) 波在无畸变传输线传送的速度

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{C_0L_0}}=\frac{1}{\sqrt{0.25\times10^{-6}\times10^{-10}}}=2\times10^8\ \text{m/s}$$

(3) 沿传输线间隔 l 距离的两电压振幅的比值为 $\frac{U(z_2)}{U(z_1)}=e^{-\alpha l}$

相距 1 km 处 $$\frac{U(z_2)}{U(z_1)}=e^{-1000\alpha}=e^{-1.15}=0.317=31.7\%$$

相距 5 km 处 $$\frac{U(z_2)}{U(z_1)}=e^{-5000\alpha}=e^{-5.75}=0.0032=0.32\%$$

习　题　(7－6)

7－6－1　一长 4 m 的有损耗均匀传输线，当短路和开路时，其入端阻抗分别为 $360\angle20°\,\Omega$ 和 $250\angle-50°\,\Omega$。试求：

(1) 此线的特性阻抗 Z_0、α 及 β；(2) R_0、ωL_0、G_0、ωC_0。

7－6－2　对于一开路或短路的有损耗传输线，其入端阻抗同时包含电阻及电抗。若其

长度 l 很短($\alpha l \leqslant 1$ 及 $\beta l \leqslant 1$)。证明其入端阻抗约为

(1) $Z_{in}=(R_0+j\omega L_0)l$ (短路线)

(2) $Z_{in}=(G_0-j\omega C_0)/[G_0^2+(\omega C_0)^2]l$ (开路线)

提 要

1. 由理想导体组成且周围介质中无损耗的传输线所导引的电磁波是 TEM 波。在与传输线垂直的横截面内，动态矢位 $\boldsymbol{A}$ 和动态标位 φ 满足拉普拉斯方程，即

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{A} = 0, \qquad \nabla_t^2 \varphi = 0$$

在此基础上，可导得用积分量电压和电流所表示的传输线方程为

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}$$

U 和 I 分别满足波动方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

式中的 L_0 和 C_0 分别为传输线每单位长度上的电感和电容，由传输线的几何尺寸、相对位置及周围媒质的物理特性决定。

2. 对于无损耗均匀传输线，若 U 和 I 随时间作正弦变化，沿线各点的电压、电流的相量式为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-j\beta z} + \dot{U}^- e^{j\beta z}$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}^+ e^{-j\beta z} + \dot{I}^- e^{j\beta z}$$

式中 $\beta=\omega\sqrt{L_0 C_0}$，称为相位常数，$\dot{U}^+$、$\dot{U}^-$ 和 $\dot{I}^+$，$\dot{I}^-$ 由传输线端点的边界条件决定。沿线各处的电压和电流可通过传输线的特性阻抗 Z_0 加以联系

$$Z_0 = \frac{\dot{U}^+}{\dot{I}^+} = -\frac{\dot{U}^-}{\dot{I}^-} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

3. 入射波传播到阻抗值不等于传输线特性阻抗的负载处及不同特性阻抗的传输线联接点处，将发生反射和透射。根据该处的边界条件，可得反射系数

$$\Gamma_L = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad 或 \qquad \Gamma_L = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{02}}$$

透射系数

$$\tau = \frac{\dot{U}'}{\dot{U}^+} = \frac{2Z_{02}}{Z_{01} + Z_{02}}$$

还可用驻波比 S 描述反射波的大小，S 与 Γ_L 的关系为

$$S = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

当无损耗均匀传输线的负载与该线的特性阻抗相等时，$\Gamma_L = 0$，$S = 1$，不发生反射，称传输线工作在匹配状态。当传输线的负载为纯电抗，或负载端开路或短路时，$|\Gamma_L| = 1$，$S = \infty$，发生全反射，形成驻波。

反射系数 Γ_L 的幅角 φ_L 可根据测量值决定，φ_L 和离负载端出现第一个电压最大值之间的距离 $|z|_{max1}$ 有下列关系

$$|z|_{max1} = \frac{\lambda}{4\pi}\varphi_L$$

负载阻抗 Z_L 和特性阻抗 Z_0 及反射系数之间的关系式为

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

4. 传输线的入端阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}(l)}{\dot{I}(l)} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta l}{Z_0 + jZ_L \tan \beta l}$$

Z_{in}的性质和传输线的长度有关。长度小于四分之一波长的短路线或开路线可用作微波电路元件。长度等于四分之一波长的无损耗传输线可用作阻抗变换器。

从传输线的始端来看，一段传输线可用它在始端的入端阻抗 Z_{in}等值替代之。如果要分析电源分配给传输线输入端的电压、电流或功率等问题时，可用传输线的入端阻抗 Z_{in}等值替代该传输线。

5. 利用 $\lambda/4$ 阻抗变换器或单短截线变换器能使无损耗均匀传输线工作在匹配状态。

6. 对有损耗均匀传输线，用电压、电流表示的传输线方程为

$$\frac{\partial U}{\partial z} + L_0 \frac{\partial I}{\partial t} + R_0 I = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} + C_0 \frac{\partial U}{\partial t} + G_0 U = 0$$

沿线的电压、电流分布为

$$\dot{U}(z) = \dot{U}^+ e^{-kz} + \dot{U}^- e^{kz}$$

$$\dot{I}(z) = \dot{I}^+ e^{-kz} + \dot{I}^- e^{kz}$$

$k = \alpha + j\beta$ 是传播常数，因此电压和电流波的振幅是有衰减的。表征传输线传播特性的参数 α、β 和 Z_0 都是频率的复杂函数。

无畸变条件是

$$\frac{L_0}{R_0} = \frac{C_0}{G_0}$$

满足无畸变条件的传输线称为无畸变传输线。

思　考　题

7-1　试比较在无限大均匀媒质中传播的均匀平面电磁波和沿传输线传播的 TEM 波两者之间的相同之处与不同之处。

7-2　试比较 TEM 波沿传输线传播的速度和在无限大均匀媒质中传播的速度。

7-3　在什么情况下，必须用分布参数电路的观点来分析传输线上的电磁过程？

7-4　为什么无损耗均匀传输线周围的电磁波属于 TEM 波？高频传输线的参数 L_0、C_0 可应用在恒定磁场和静电场中所得的相应计算结果，对此应怎样理解？

7-5　均匀传输线中的电压、电流的定义如何？它们满足什么方程？

7-6　均匀传输线的原参数和副参数指的是什么？写出无损耗线的传播常数 k 和特性阻抗 Z_0 的表达式。

7-7　在不同终端情况下，写出无损耗传输线电压和电流的正弦稳态解。

7-8　何谓传输线的匹配？无损耗线在匹配状态下，沿线的电压、电流的分布及能量的传输各具有什么特点？如何利用四分之一波长传输线实现匹配？

7-9　一般市电传输线用户是否可像高频传输线那样短路？为什么？当长度与波长可以比拟时，线路允许开路吗？

7-10　入端阻抗 Z_{in}是怎样定义的？它和哪些量有关？它和特性阻抗有何差异？什么情况下 $Z_{in}=Z_0$？

7-11　当负载阻抗 Z_L 不等于特性阻抗 Z_0 时，可采用什么方法使无损耗传输线处于匹配工作状态？

7-12　一高频传输线(特性阻抗为 Z_0)线长等于 $\lambda/8$，分别将其终端短路和开路，试问此时其入端阻抗 Z_{in}是否分别为 $Z_{in}=0$ 或 $Z_{in}=\infty$？为什么？

7-13　若一开路的无损耗线的长度为(a)$\lambda/4$；(b)$\lambda/2$；(c)$3\lambda/4$，试问该线的入端阻抗。

7-14　一条长度为 l 的无损耗传输线，其特性阻抗与传播常数和该线的开路、短路之入端阻抗满足怎样的关系？

7-15　什么是电压反射系数？它与电流反射系数相同吗？试解释之。

7-16　无损耗均匀传输线上出现纯驻波的几种可能负载情况是什么？试列表归纳。

7-17　什么是驻波比？它与电压反射系数的关系如何？对一终端开路的无损耗传输线而言，反射系数和驻波比的值为多少？对一终端短路的无损耗传输线其值又为多少？

7-18　接有电阻负载的无损耗线，若(a)$R_L>Z_0$，(b)$R_L<Z_0$，试问电压波的最小值在线上出现的位置。

7-19　试叙述如何通过测量无损耗线上的驻波比，来求出该线之负载阻抗的值。

7-20 当一传输线的 R_0 和 G_0 都小，但不能忽略时，证明衰减常数是

$$\alpha = \frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

相位常数是　　　　$\beta \approx \omega\sqrt{L_0C_0}$

7-21 何谓无畸变线？无畸变条件是什么？

习　题

7-1 利用传输线的入端电压 U_1 和电流 I_1 及传输线的 k 和 Z_0，分别(a)以指数形式，(b)双曲线形式，表示出 $U(z)$及 $I(z)$。

7-2 已知一双线无损耗传输线的线间距 $D=8$ cm，导线直径为 $d=1$ cm，传输线的周围介质为空气。试计算：

(1) 单位长度电感和单位长度电容；

(2) 当 $f=600$ MHz 时的特性阻抗和相位常数。

7-3 计算外导体半径 $b=23$ cm，内导体半径 $a=10$ mm，填充介质分别为空气和 $\varepsilon_r=2.25$ 介质时的同轴线的特性阻抗。

7-4 一无损耗线的特性阻抗 $Z_0=70\ \Omega$，终端接负载阻抗 $Z_2=(100-\mathrm{j}50)\Omega$，求：

(1) 传输线上的反射系数 Γ_z；

(2) 传输线上的电压、电流表示式；

(3) 距线上第一个电压波节和电压波腹的距离 z_{min}和 z_{max}；

(4) 画出传输线上电压、电流的振幅分布。

7-5 一无损耗的 $\lambda/4$ 传输线，特性阻抗为 Z_0，一端被接以一感性负载 $Z_L=R_L+\mathrm{j}X_L$

(1) 证明其入端阻抗相当于一电阻 R_i 和一电容 X_i 的并联；

(2) 求出输入端与负载端的电压大小的比值。

7-6 一无损耗传输线，接有负载 $Z_L=(40+\mathrm{j}30)\Omega$，求：

(1) 此线特性阻抗为多少时沿线有最小驻波比；

(2) 最小驻波比对应的电压反射系数；

(3) 离负载最近的最小电压发生处。

7-7 一无损耗传输线，特性阻抗为 Z_0，一端接一负载 Z_L。

(1) 以 Z_0、Z_L 表示出驻波比 S。

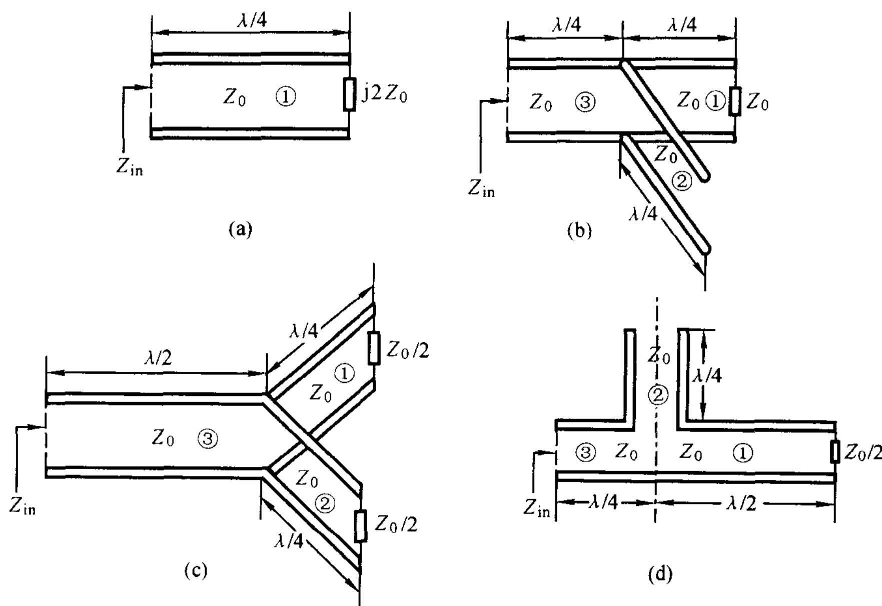
(2) 求从最大电压处看向负载的入端阻抗，以 S 和 Z_0 表示。

(3) 求从最小电压处看向负载的入端阻抗，以 S 和 Z_0 表示。

7-8 已知传输线在 1 GHz 时的分布参数为：$R_0=10.4\ \Omega/\mathrm{m}$；$C_0=8.35\times10^{-12}$ F/m；$L_0=1.33\times10^{-6}$ H/m；$G_0=0.8\times10^{-6}$ S/m。试求传输线的特性阻抗，衰减常数，相位常数，传输线上的波长及传播速度。

7-9 求图示分布参数的传输线的入端阻抗。

7-10 有一段特性阻抗为 $Z_0=500\ \Omega$ 的无损耗传输线，当其终端短路时，测得始端的



题 7－9 图

入端阻抗为 250 Ω 的感抗，求该传输线的长度。如果该线的终端为开路，长度又该为多少?

7－11 把一电压为 $V(t)=(10\cos 8\,000\pi t)V$，内阻抗 $Z_g=(40+j30)\Omega$ 的电源接到一特性阻抗为 50 Ω 的无畸变传输线上，此线长 50 km，单位长度的电阻为 0.5 Ω/m，单位长度的电感为 1.11×10^{-2} H/m，另一端为匹配负载，求：

(1) 线上各点的瞬时电压和电流；(2)负载端的瞬时电压和电流；(3)传至负载的平均功率。

7－12 一特性阻抗为 300 Ω 的无损耗传输线，一端接一未知负载，驻波比为 2，距负载 0.3λ 为最接近负载的最小值电压，求(1)负载处反射系数；(2)未知负载 Z_L；(3)若将 Z_L 拿掉换一电阻，问电阻值及离电阻多少距离处其入端阻抗等于 Z_L。

7－13 实验中将一特性阻抗为 50 Ω 的无损耗传输线接一未知负载阻抗，测得驻波比为 2.0，两最小值电压出现的间隔为 25 cm，且最小电压出现处与负载间最短距离为 5 cm，求(1)Z_L；(2)反射系数；(3)若终端短路，则最小值电压与终端之间最短距离为多少?

7－14 设有一无损耗传输线，其特性阻抗为 Z_0，当其终端接有阻抗 Z_2 时，测得线上的驻波系数为 S，由负载到第一个电压波节点距离为 l_{min}。试证明负载 Z_2 可由下式计算

$$Z_2 = Z_0\frac{S-j(S^2-1)\sin\varphi\cos\varphi}{S^2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}$$

式中，$\varphi=\beta l_{min}=\frac{2\pi}{\lambda}l_{min}$。

7－15 一无损耗线分别接有不同负载时，在线上都要产生驻波，设第一个 U_{min}(即波节)分别位于：

(1) 负载端；

(2) 离负载 $\lambda/4$ 处;

(3) 离负载 $\lambda/4$ 距离之间;

(4) $\lambda/4$ 和 $\lambda/2$ 之间。

试说明不同状态下的负载各具有什么特点(如感抗或容抗或纯电阻等等)。

7-16 有一特性阻抗 $Z_0=50\ \Omega$ 的无损耗线,周围电介质参数 $\varepsilon_r=2.26$,$\mu_r=1$,接有 $1\ \Omega$ 的负载。当 $f=100$ MHz 时的线长为 $\lambda/4$,试计算

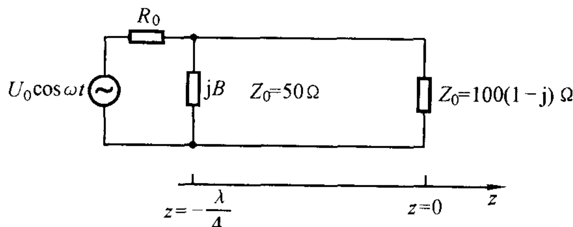
(1) 线的几何长度;

(2) 负载端的反射系数;

(3) 驻波比,并问第一个 $U_{\min}$ 出现在何处?

(4) 传输线的入端阻抗。

7-17 长度为 $\lambda/4$ 的无损耗线联接如题 7-17 图所示。其特性阻抗 Z_0 为 50 Ω。若要使电源发出最大功率,试决定集中参数 B 的值及电源内阻 R_0。



题 7-17 图

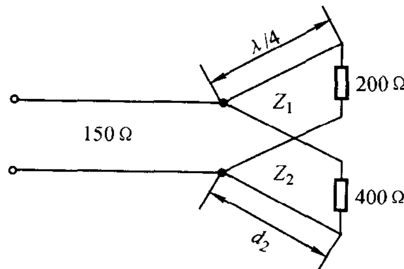
7-18 无损耗线上的测量值表明,当驻波比 $S=1.8$ 时,第一个 $U_{\min}$ 位于 $z=-l$ 处,若负载短路,第一个 $U_{\min}$ 的位置移到 $z=-(l+8)$cm 处,设无损耗线的特性阻抗为 50 Ω,波长 $\lambda=80$ cm,试决定负载阻抗 Z_L。

7-19 设电视天线接收的信号电压可用等效发电机定理表示成:当 $\omega=5\times10^8$ rad/s 时,电压为 $1\angle0°$ mV 及内阻为 300 Ω。若用特性阻抗为 300 Ω,线长 l 等于 λ 的无损耗线将电视天线接收的信号传输到输入电阻为 300 Ω 的电视机。

(1) 问电视机能吸收多少平均功率;

(2) 若有两台 300 Ω 的电视机并联,要求每台电视机仍能接收单独一台时的平均功率是否可能?如果不行,试证明之;如果行,试设计一个系统以达到上述目的。

7-20 若原有特性阻抗为 150 Ω 的无损耗线,通过一段 $\lambda/4$ 的无损耗线($Z_{01}=173.2\ \Omega$)供电给 200 Ω 的负载,另有 400 Ω 的负载按图联接,若 400 Ω 上的电压和 200 Ω 上的电压的相位相反(指 $Z_{01}=Z_{02}$ 时),问 d_2 该为多少?若要使 400 Ω 的负载吸收的功率和 200 Ω 负载吸收的功率相等,试决定该线的特性阻抗 Z_{02}。



题 7-20 图

第八章　波导与谐振腔

前面两章分别讨论了电磁波在无界空间中和双导线上的传播特性。本章将要讨论电磁波在有界空间中的传播——在波导中的传播。波导是用来引导电磁波在有限空间中传播，使它不至于扩散到漫无边际的空间中去的结构的总称。前一章中介绍的二导线传输线就是一种波导。波导还可以作成导体管或介质板(杆)等形状。最常用的波导是一段空心金属管子，内壁常镀以银。常见的有横截面为矩形和圆形的管子，分别称为矩形波导或圆波导，如图 8－1 所示。波导管的金属管壁能把电磁波限制在管中，使其在管内且沿着管的轴线方向传播。它是一种微波传输工具。

本章首先讨论电磁波沿均匀波导传播的一般特性。然后，重点讨论两种常见的典型波导——矩形波导和介质板波导，得出其中的电场和磁场表达式。进而分析电磁波的传播模式及截止频率。最后介绍谐振腔，讨论场在矩形谐振腔内的不同模式。

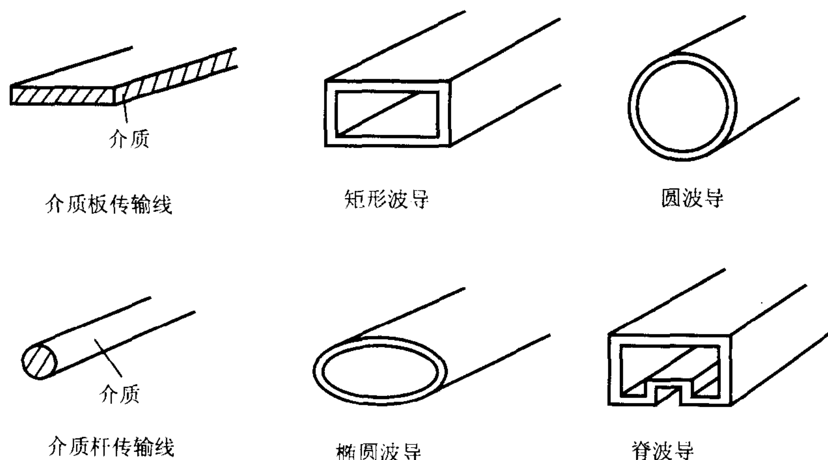


图 8－1　几种波导示意图

§8－1　导行电磁波的分类及其一般特性

这一节将讨论电磁波沿均匀波导传播的一般特性。介绍导行电磁波的分

类、传播模式、截止频率和截止波长等概念。

8.1.1 导行电磁波的分类

为了数学上力求简单，把坐标的 z 轴选作波导的轴线方向，这样波导的横截面就是 xOy 平面，如图 8-2 所示，同时做以下假设：

(1) 波导的横截面形状和媒质特性沿轴线 z 不变化，即具有轴向均匀性。

(2) 金属波导为理想导体，即 $\gamma=\infty$。波导内填充均匀、线性、各向同性的理想介质。

(3) 波导内没有激励源存在，即 $\rho=0$ 和 $\boldsymbol{J}=0$。

(4) 电磁波沿 z 轴传播，且场随时间作正弦变化。

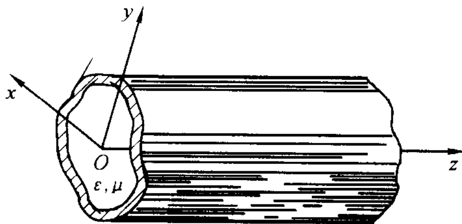


图 8-2 任意截面的均匀波导

在以上假设下，电磁场基本方程组的复数形式如下

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}} \tag{8-1}$$

$$\nabla\times\dot{\boldsymbol{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}} \tag{8-2}$$

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{H}}=0 \tag{8-3}$$

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{E}}=0 \tag{8-4}$$

由此可以得到，电磁场的电场分量 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和磁场分量 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 均满足齐次的波动方程

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{E}}+k^2\dot{\boldsymbol{E}}=0 \tag{8-5}$$

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{H}}+k^2\dot{\boldsymbol{H}}=0 \tag{8-6}$$

式中 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是波数。既然波导轴线沿 z 方向，那么不论波的传播情况在波导内怎样复杂，其最终的效果只能是一个沿 z 方向前进的导行电磁波。因而可以把波导内电场分量 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和磁场分量 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 写成

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{8-7}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{H}(x,y)\mathrm{e}^{-\gamma z} \tag{8-8}$$

其中 $\boldsymbol{E}(x,y)$ 和 $\boldsymbol{H}(x,y)$ 是待定函数。γ 为波沿 z 方向的传播常数。

将(8-7)式代入方程(8-5)式，得

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{E}(x,y) + k_c^2 \boldsymbol{E}(x,y) = 0 \tag{8-9}$$

这里$\nabla_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$是横向拉普拉斯算子。式中

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 \tag{8-10}$$

同理

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{H}(x,y) + k_c^2 \boldsymbol{H}(x,y) = 0 \tag{8-11}$$

可以由方程(8-9)式和方程(8-11)式得到 $\boldsymbol{E}(x,y)$和 $\boldsymbol{H}(x,y)$各分量的标量波动方程。也可先求解纵向场分量的波动方程，得到两个纵向分量 E_z 和 H_z，然后再根据电磁场基本方程组求得所有横向分量。纵向场分量 E_z 和 H_z 满足的标量波动方程为

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0 \tag{8-12}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0 \tag{8-13}$$

由上述两个方程求得 E_z 和 H_z 后，即可从电磁场基本方程组中的两个旋度方程得到四个横向场分量

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathrm{j}\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\
E_y &= \frac{1}{k_c^2}\left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \mathrm{j}\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\
H_x &= \frac{1}{k_c^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\
H_y &= -\frac{1}{k_c^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8-14}$$

上式中所有场量只与坐标 x 和 y 相关。

根据以上的分析，在波导中传播的导行电磁波可能出现 E_z 或 H_z 分量。因此可以依照 E_z 和 H_z 的存在情况，将在波导中传播的导行电磁波分为三种波型(或模式)：TEM 波型、TE 波型及 TM 波型。

横电磁波(TEM)：这种波既无 E_z 分量又无 H_z 分量，即 $E_z=0$、$H_z=0$。从(8-14)式可看出，只有当 $k_c=0$ 时，横向分量才不为零。所以有

$$\gamma^2 = -k^2$$

或者

$$\gamma = \mathrm{j}k = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{8-15}$$

则方程(8-9)式和(8-11)式就变成

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{E}(x,y)=0 \tag{8-16}$$

$$\nabla_t^2 \boldsymbol{H}(x,y)=0 \tag{8-17}$$

这正是拉普拉斯方程。这表明，导波系统中 TEM 波在横截面上的场分量满足拉普拉斯方程。因此其分布应该与静态场中相同边界条件下的场分布相同。正是由于这一点，我们断定凡能维持二维静态场的导波系统，都能传输 TEM 波。例如二线传输线、同轴线等。也即为了传输 TEM 波必须要有二个以上的导体。关于这一点可解释为：由于 TEM 波在横截面上的电场分量具有与二维的静电场同样的性质，它必定起始于一个导体而终止于另一个导体。

空心金属波导管内部，由于不能维持二维静态场，故不能传输 TEM 波。这是波导管中电磁波显著的特点之一。

横电波(TE 波)：当传播方向上有磁场的分量而无电场的分量($H_z \neq 0$, $E_z=0$)时，此导行波称为 TE 波。

对于 TE 波，需要研究确定 H_z 的方法。H_z 满足波动方程(8-13)式，且在金属导体内壁的边界条件为

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{8-18}$$

这表明对于 TE 波来说，归结为在第二类齐次边界条件下求解二维齐次波动方程(8-13)式。对于该方程，只有在 k_c 取某些特定的离散值时才有解，使解存在的 k_c 值称为本征值。针对不同截面形状及尺寸的波导，这些本征值是不同的，后面讨论矩形波导时，将用分离变量法求出它的本征值 k_c。

横磁波(TM 波)：当传播方向上有电场的分量而无磁场的分量($E_z \neq 0$, $H_z=0$)时，此导行波称为 TM 波。

对于 TM 波，需要研究确定 E_z 的方法。E_z 满足波动方程(8-12)式，且在金属导体内壁的边界条件为

$$E_z|_S = 0 \tag{8-19}$$

这表明对于 TM 波来说，归结为在第一类齐次边界条件下求解二维齐次波动方程的本征值 k_c 的问题。

8.1.2 电磁波在波导中的传播特性

求得 TE 波和 TM 波的各个分量后，再分析它们在波导中的传播特性。

对于 TE 波、TM 波，(8-10)式中 $k_c^2 \neq 0$。因此将它改写成

$$\gamma = \begin{cases} \mathrm{j}\sqrt{k^2 - k_c^2} = \mathrm{j}\beta & k > k_c \\ \sqrt{k_c^2 - k^2} = \alpha & k < k_c \end{cases} \tag{8-20}$$

由(8-7)式和(8-8)式可知，当 $k>k_c$ 时，波沿 z 方向传播，这种模式称为传播模式；当 $k<k_c$ 时，场沿 z 方向指数衰减，波导内没有波的传播，这种模式称为非传播模式或凋落模式。从传播模式变为非传播模式发生在 $k=k_c$ 处。故把 $k=k_c$ 时的频率称为截止频率 f_c，有

$$f_c=\frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{8-21}$$

把对应于截止频率 f_c 的自由空间波长 λ_c 称为截止波长，有

$$\lambda_c=\frac{v}{f_c}=\frac{2\pi}{k_c} \tag{8-22}$$

由上述两式可见，波导的本征值 k_c 决定了它的截止频率和截止波长。k_c 与波导的几何形状和尺寸大小有关。

当工作频率 f 比截止频率 f_c 高或工作波长 λ 比截止波长 λ_c 短时，电磁波才可以在波导内传播，为传播模式；反之，电磁波不能在波导内传播，为非传播模式。这和传播 TEM 波的导波系统不同，TEM 波传播模式是没有截止频率和截止波长的，因此，在双导线传输线中既可传播高频电磁波，也可传播低频电磁波以至稳恒电流。

当 $f>f_c$（或 $k>k_c$）时，由(8-20)式得

$$\gamma=\mathrm{j}\beta=\mathrm{j}k\sqrt{1-\left(\frac{k_c}{k}\right)^2}=\mathrm{j}k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{8-23}$$

这是一个相位常数为 β 的传播模式，且有

$$\beta=k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \tag{8-24}$$

此时，波导内沿传播方向上相位差 2π 的两点间的距离，称为相应的波导波长 λ_g

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}>\lambda \tag{8-25}$$

式中 $\lambda\left(=\frac{2\pi}{k}=\frac{v}{f}\right)$是频率为 f 的平面电磁波在无限大理想介质中的波长。上式表明波长 λ_g 大于无限大媒质中的波长 λ。

在波导内，波传播的相速度为

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \tag{8-26}$$

可见，波导中波的相速度 v_p 亦大于无限大媒质中波的相速度 $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$。$v_p>v$ 也说明波在波导内的真实传播方向并不是 z 轴方向，而是曲折前进，这一点不同于 TEM 波。(8-26)式还表明 v_p 是频率的函数，TE、TM 波是色散波。此色散不同于前面的因导电媒质引起的色散，它是由波导的边界条件引起的，因此称它为几何色散。

当 $f<f_c$(或 $k<k_c$)时，γ 为一实数，由(8-20)式得

$$\gamma=\alpha=k_c\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \tag{8-27}$$

这是一个衰减常数，由于场分量都有传播因子 $e^{-\gamma z}=e^{-\alpha z}$，所以波沿 z 方向很快衰减。由此可见，波导呈现高通滤波器的特性。对给定的模式，只有频率高于模式截止频率的波，才能在波导内传播。

例 8-1 如图 8-3 所示，两平行导体板间距为 a，沿 y 和 z 方向无限长，板间有导行波为 TM 波，场量 E_z 仅是 x 的函数，求该 TM 波的截止波长 λ_c。

解：由于 E_z 与 y 无关，所以 E_z 满足的波动方程为

$$\frac{d^2E_z}{dx^2}+k_c^2E_z=0$$

若 $k_c^2>0$，上式的一般解为

$$E_z=A\sin k_cx+B\cos k_cx$$

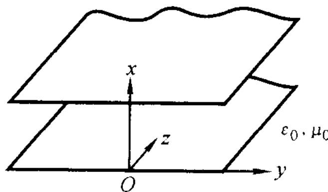


图 8-3 平行平板波导

根据边界条件(导板视为理想导体)，$E_z|_{x=0}=0$，得 $B=0$；和 $E_z|_{x=a}=0$，得

$$k_c=\frac{n\pi}{a} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

最终电场强度的表示式为

$$E_z=A\sin\frac{n\pi x}{a}$$

式中 A 是由激励源决定的。根据(8-22)式，截止波长为

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_c}=\frac{2a}{n}$$

$n=1,2,3,\cdots$表示对应于不同的波型有不同的截止波长。

习 题 (8-1)

8-1-1 如图 8-3 所示，两块平行的金属板，相距为 a，已知其中传输的电磁波的

电、磁场纵向分量是：$H_z=(A\cos k_c x+B\sin k_c x)$，$E_z=0$，试求：

(1) 电磁场的其余分量；

(2) 用边界条件确定常数 A（或 B），k_c（A、B 有一个决定于波源）；

(3) 说明是什么波型，求相应的截止波长 λ_c。

§8-2 矩形波导

上一节介绍了均匀波导中电磁波的分类及其一般特性。这一节具体讨论一种最常用的金属波导管——矩形波导。矩形波导管通过传播 TE 波或 TM 波来传输电磁能量；矩形波导管不能传播 TEM 波。其实，在单导体的空心或填充介质的波导管内，都不可能存在 TEM 波。

由理想导体壁组成的截面为矩形的波导管，如图 8-4 所示。内壁面的长和宽分别为 a 和 b。波导内填充介电常数为 ε、磁导率为 μ 的媒质。如前面所述，矩形波导中能传播的模式是 TE 模式和 TM 模式。下面分别讨论 TM 波和 TE 波。

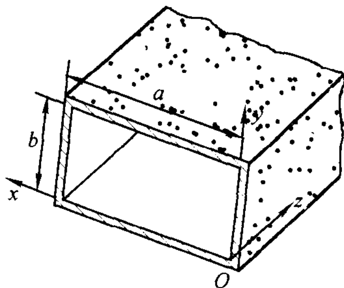


图 8-4　矩形波导

8.2.1 矩形波导中的 TM 波和 TE 波

TM 波

TM 波的 $H_z=0$，其余的场分量可以利用(8-14)式由纵向电场 E_z 确定。E_z 是下列方程的解

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k_c^2 E_z=0\\&E_z\big|_{x=0}=E_z\big|_{x=a}=0\\&E_z\big|_{y=0}=E_z\big|_{y=b}=0\end{aligned}\right\}\tag{8-28}$$

显然，根据分离变量法不难证明，纵向电场 E_z 的解为

$$E_z=A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\tag{8-29}$$

$$k_c^2=k_{mn}^2=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\tag{8-30}$$

式中 A_{mn} 是振幅常数，由导行波的激励源确定。m、n 是不为零的任何正整数。否则，只要 m、n 中有一个为零，场量将全部为零。

利用(8-14)式可求得 TM 波的其它横向场分量为

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
E_y &= -\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
H_x &= \frac{\mathrm{j}\omega\epsilon}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
H_y &= -\frac{\mathrm{j}\omega\epsilon}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8-31}$$

TE 波

TE 波的 $E_z=0$，其余的场分量可以利用(8－14)式由纵向磁场 H_z 确定，其方程和对应的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z &= 0\\
\left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial H_z}{\partial y}\right|_{x=a} &= 0\\
\left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial H_z}{\partial x}\right|_{y=b} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{8-32}$$

因此，满足上述边界条件的本征值问题的解为

$$H_z = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{8-33}$$

$$k_c^2 = k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{8-34}$$

式中 A_{mn}是振幅常数，由导行波的激励源确定，m、n 为任何正整数和零，但 m、n 不能同时为零，否则场量将全部为零。

利用(8－14)式可求得 TE 波的其它横向场分量为

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
E_y &= -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
H_x &= \frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\\
H_y &= \frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8-35}$$

8.2.2 矩形波导中波的传播特性

让我们作如下的讨论：

(1) 由 TM 波的解(8－29)式和(8－31)式、TE 波的解(8－33)式和(8－35)式看出，在波导管的横截面上，场是正弦变化的，其分布情况直接取决于 m 和 n 这两个常数的值。取不同 m 和 n 值，有不同的场分布，称为不同的模式，分别用 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模表示。在实际问题中，总是选取一个特定的模式来传送电磁波。

对于 TM 模，m 和 n 都不能为零，故不存在 TM_{00}、TM_{0n} 和 TM_{m0} 模电磁波。对于 TE 模，m 和 n 不能同时为零，故不存在 TE_{00} 模电磁波。

图 8－5、图 8－6 和图 8－7 分别画出了 TE_{10} 模电磁波在 $t=0$ 时刻的电场、磁场和立体电磁场的分布。

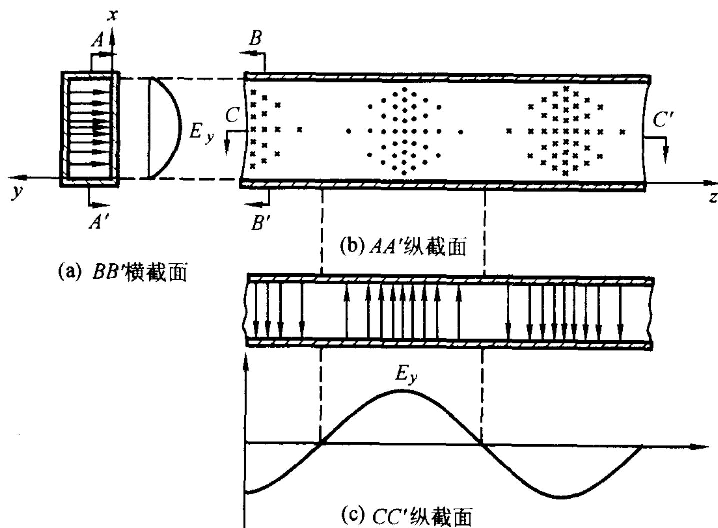


图 8－5　TE_{10} 波的电场分布

(2) 由(8－21)式和(8－30)或(8－34)式知道截止频率 f_c 为

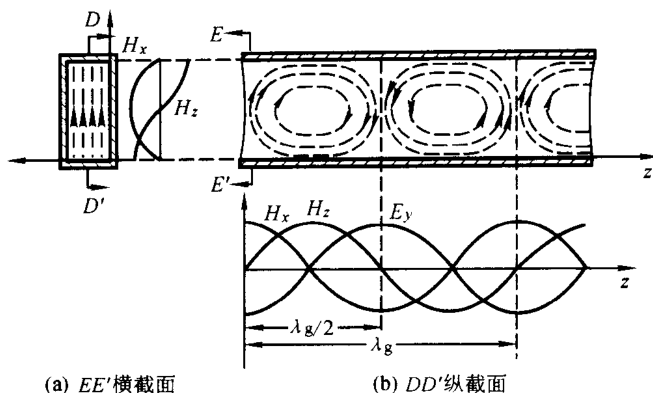
$$f_c=\frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{8-36}$$

而相应的截止波长

$$\lambda_c=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}} \tag{8-37}$$

可见，截止频率和波长都与工作频率无关，仅与波导的尺寸和模式有关。

不同的波型可以具有相同的截止波长，这种现象称为简并现象，发生简并的模式称为简并模式。在 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模中，除 TE_{0n}、TE_{m0} 模外，其它模式都是“双重简并的”，例如 TE_{11} 与 TM_{11} 模，TE_{21} 与 TM_{21} 模等等。



(a) *EE'*横截面　　(b) *DD'*纵截面

图 8-6　TE_{10}波的磁场分布

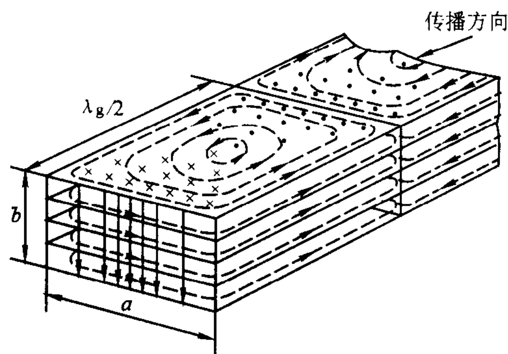


图 8-7　TE_{10}波的立体电磁场分布

(3) 矩形波导可以工作在多模状态，也可以工作在单模状态。由(8-37)式可知，波导的尺寸决定后，m、n 的值越小，截止波长越长。TE_{10}模和 TM_{11}模分别是 TE 波和 TM 波中具有最长截止波长的模式，称为最低模式。而 TE_{10}模的截止波长又比 TM_{11}模的截止波长长，它具有最长的截止波长。因此 TE_{10}模亦称为主模，其它模式都称为高次模。

由(8-34)式，当 $m=1$，$n=0$ 时，得 TE_{10}的本征值$(k_c)_{10}$

$$(k_c)_{10}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \tag{8-38}$$

于是

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = \mathrm{j}\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{8-39}$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \tag{8-40}$$

由(8－33)式和(8－35)式，得 TE_{10}模的场分量

$$\left.\begin{aligned} H_z(x,y) &= A_{10}\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \\ E_x(x,y) &= H_y(x,y) = E_z(x,y) = 0 \\ E_y(x,y) &= -\frac{j\omega\mu a}{\pi}A_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ H_x(x,y) &= \frac{ja\beta}{\pi}A_{10}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8-41}$$

由上式可见，TE_{10}模只有三个非零的场分量，即 E_y、H_z 和 H_x。它们的分布见图 8－5、图 8－6 和图 8－7。

由理想导体表面的边界条件可知，在波导壁上的电流线密度 $\boldsymbol{K}$ 与磁场强度有关，且有

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H} \tag{8-42}$$

式中，$\boldsymbol{e}_n$ 为壁面的外法线方向单位矢量，$\boldsymbol{H}$ 是壁上的磁场强度。在 $t=0$ 时，波导内壁上的电流面分布如图 8－8 所示。

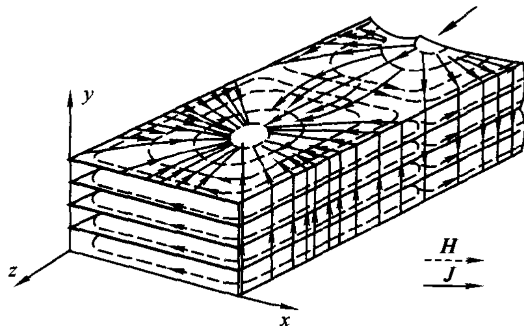


图 8－8　矩形波导中 TE_{10}模的管壁电流

(4) 由于 TE_{10}模的截止波长 $\lambda_c(=2a)$是矩形波导中能出现的最长的截止波长，因此，当工作波长 $\lambda \geqslant 2a$ 时，电磁波就不能在波导中传播，所以 $\lambda \geqslant 2a$ 的区域称为截止区。若工作波长 $\lambda < a$，则至少会出现两种以上的波型，这个区称为多模区。若工作波长在 $a < \lambda < 2a$，就只有一个 TE_{10}模出现，其它模式都处于截止状态，这种情况称为单模传输。因此，这个区又称单模区。在使用波导传输能量时，通常要求工作在单模状态。

当 $b/a=1$ 时，基波双重简并，因为要求只激励单一模有困难，所以这种尺寸的波导不宜用作信息传输用。当 $b/a=1/2$ 时，在 $2a>\lambda>a$ 的范围内只可能传输 TE_{10}模。当 $b/a>1/2$ 时，则可能传输的单模范围变窄。如果 $b/a<1/2$，则在 $2a>\lambda>a$ 的范围内只能传输 TE_{10}模，但由于导体损耗所引起的衰

减随 b 越大而变得越小，所以 $b/a=1/2$ 的尺寸比较好。市场上的矩形波导管即采用这种尺寸比。采用主模 TE_{10} 传输具有截止频率低、损耗小、波型稳定和波导尺寸小等优点。

总之，各种空心柱形长直波导的基本特性是相同的，只要理解了矩形波导的特性也就为理解其它类型波导的特性提供了基础。

例 8-2 空气填充的矩形波导的截面尺寸为 $a=7$ cm，$b=3$ cm。(1)计算 TE_{10}、TE_{20} 等若干个模的截止波长，并指出简并波型；(2)如果电磁波的频率 $f=3\times10^9$Hz，$\varepsilon_r=4$，这时波导中存在哪些模式的波；(3)若要求波导中只传播 TE_{10} 波，波导尺寸应如何改变？

解：(1)根据截止波长计算公式

$$\lambda_c=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

计算可得

模	TE_{10}	TE_{20}	TE_{01}	TE_{11}、TM_{11}	TE_{30}	TE_{21}、TM_{21}	TE_{31}、TM_{31}	TE_{40}
λ_c/cm	14	7	6	5.51	4.67	4.56	3.68	3.5

简并波型为：(TE_{11}、TM_{11})，(TE_{21}、TM_{21})，(TE_{31}、TM_{31})

(2) 在 $\varepsilon_r=4$ 的介质中，波长 $\lambda=\dfrac{v}{f}=\dfrac{c}{f\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=5$ cm，从表中可以看出它小于 TE_{10}、TE_{20}、TE_{01}、TE_{11} 及 TM_{11} 5 个模式的截止波长。即这 5 个模式的波可以在填充 $\varepsilon_r=4$ 的介质的波导中传播。

(3) 若只允许存在 TE_{10} 型波，应使 λ 小于 TE_{10} 的 λ_c 而大于 TE_{20}、TE_{01} 的 λ_c，由于 $\lambda_c(TE_{10})=2a$，$\lambda_c(TE_{20})=a$，$\lambda_c(TE_{01})=2b$，所以有

$$\lambda/2<a<\lambda \qquad 和 \qquad b<\lambda/2$$

可以选 $a=3.5$ cm，$b=1.5$ cm，还可以有其它的尺寸选择。

习 题 (8-2)

8-2-1 一空气填充的矩形波导，$a\times b=6\times4$ cm^2，信号源频率是 3GHz，试计算对于 TE_{10}、TE_{01}、TE_{11}、TM_{11} 四种波型的截止波长 λ_c、波导波长 λ_g、相位常数 β 和波的相速度 v_p。

8-2-2 矩形波导中 TM 模的纵向电场

$$E_z = E\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{3}\right)$$

式中 x，y，z 的单位是 cm。求 λ_c。如果这是 TM_{32}模，求波导尺寸 a 和 b。

§8-3 介质波导

前面一节，以矩形波导为例讨论了由金属导体构成的波导管传播的电磁波特性。当电磁波的频率在毫米波段(大于 20 千兆赫)时，金属波导管已无法在工艺上实现，且损耗很大，取而代之的是介质波导。所谓介质波导，就是一种利用不同介质的分界面引导电磁波传播的波导。例如，电介质棒或板就是典型的介质波导。介质波导在集成光学系统中已得到了许多应用。

这里只讨论由介质板引导的电磁波，由此简单地介绍介质波导的工作原理。

8.3.1 平板介质波导的解的形式

如图 8-9 所示，平板介质的介电常数为 ε，板周围为自由空间，它们的磁导率都为 μ_0，介质板的厚度为 $2d$，沿 y、z 方向伸向无限远。设电磁波沿 $+z$ 方向传播，并且在 y 方向上是均匀的。

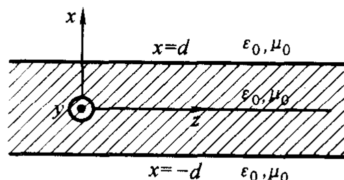


图 8-9 介质板波导内电磁波的传播

与金属波导的分析方法相同，这里仍先求解场的纵向分量。由于场量在 y 方向上是均匀的，所以方程(8-12)式和(8-13)式可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2E_z(x)}{dx^2}+k_c^2E_z(x)=0\\ \frac{d^2H_z(x)}{dx^2}+k_c^2H_z(x)=0\end{aligned}\right\}\qquad(8-43)$$

这里，考虑到当$|x|>d$ 时，电磁波在自由空间中沿 x 方向随离开板的距离增加而衰减，所以 k_c^2 必须是负实数，故(8-10)式写成

$$k_c^2=(\omega^2\mu_0\varepsilon_0+\gamma^2)=-k_1^2\qquad(8-44)$$

而当$|x|<d$ 时，由(8-10)式，有

$$k_c^2=\omega^2\mu_0\varepsilon+\gamma^2=k_2^2\qquad(8-45)$$

不难得到，方程(8-43)的一般解为

$$E_z(x)=\begin{cases}Ae^{-k_1|x|} & (|x|>d)\\ C_1\sin k_2x+C_2\cos k_2x & (|x|<d)\end{cases}\qquad(8-46)$$

$$H_z(x)=\begin{cases}Be^{-k_1|x|} & (|x|>d)\\ D_1\sin k_2x+D_2\cos k_2x & (|x|<d)\end{cases} \tag{8-47}$$

将(8-46)式和(8-47)式分别代入(8-7)式和(8-8)式，得沿 z 方向传播的电磁波的纵向电场 $\dot{E}_z(x,z)$ 和 $\dot{H}_z(x,z)$ 的一般解形式为

$$\dot{E}_z(x,z)=\begin{cases}Ae^{-k_1|x|}e^{-\gamma z} & (|x|>d)\\ (C_1\sin k_2x+C_2\cos k_2x)e^{-\gamma z} & (|x|<d)\end{cases} \tag{8-48}$$

$$\dot{H}_z(x,z)=\begin{cases}Be^{-k_1|x|}e^{-\gamma z} & (|x|>d)\\ (D_1\sin k_2x+D_2\cos k_2x)e^{-\gamma z} & (|x|<d)\end{cases} \tag{8-49}$$

可见，与金属波导中相似，在介质板内部 $\dot{E}_z(x,z)$ 和 $\dot{H}_z(x,z)$ 沿 x 方向也是正弦变化的，或呈驻波分布。下面分别按 TE、TM 模式分别讨论。

8.3.2 TE 波

此时 $\dot{E}_z=0$，$\dot{H}_z\neq0$。在介质板内部 $\dot{H}_z$ 沿 x 方向有两种驻波形式。一种是偶函数 $\cos k_2x$；另一种是奇函数 $\sin k_2x$，分别简称为 TE 波的偶模和奇模。

对于 TE 波的偶模，场的唯一纵向分量 $\dot{H}_z(x,z)$，可由(8-49)式得到为

$$\dot{H}_z(x,z)=\begin{cases}Be^{-k_1|x|}e^{-\gamma z} & (|x|>d)\\ D_2\cos k_2x e^{-\gamma z} & (|x|<d)\end{cases} \tag{8-50}$$

因此，再利用(8-14)式就可得到各个区域中场的横向分量 $\dot{E}_x$、$\dot{E}_y$、$\dot{H}_x$ 和 $\dot{H}_y$。这里略去。

在介质板的表面($x=\pm d$ 处)两侧，场的切向分量 $\dot{H}_z$、$\dot{H}_y$ 必须连续，因此，有

$$Be^{-k_1d}=D_2\cos k_2d$$

$$\frac{\mu_0}{k_1}B\,e^{-k_1d}=-\frac{\mu_0}{k_2}D_2\sin k_2d$$

上面两式左右两边分别相除，并整理之得到

$$k_1d=-k_2d\cot k_2d \tag{8-51}$$

这是有关 k_1、k_2 的超越方程。由(8-44)式和(8-45)式可得 k_1 和 k_2 的另一关系式

$$-k_1^2-\omega^2\mu_0\varepsilon_0=k_2^2-\omega^2\mu_0\varepsilon$$

或改写为

$$(k_2d)^2+(k_1d)^2=(\omega d)^2\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0) \tag{8-52}$$

联立求解(8－51)式和(8－52)式，可得 k_1 和 k_2，从而最后确定出 γ 的值。但由于(8－51)式是有关 k_1 和 k_2 的超越方程，故一般采用图解法。取 k_2d 为横坐标，k_1d 为纵坐标。方程(8－52)式是以 $\omega d\sqrt{\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}$ 为半径的圆方程，它与超越方程(8－51)式的交点即为 TE 波偶模的本征值 k_1 和 k_2，如图 8－10 所示。

对于 TE 波的奇模，场的唯一纵向分量 $\dot{H}_z(x,z)$，可由(8－49)式得到为

$$\dot{H}_z(x,z)=\begin{cases}Be^{-k_1|x|}e^{-\gamma z} & (|x|>d)\\ D_1\sin k_2xe^{-\gamma z} & (|x|<d)\end{cases} \tag{8-53}$$

与偶模的分析方法类似，可得 TE 波奇模的本征值方程为

$$k_1d=k_2d\tan k_2d \tag{8-54}$$

联立求解(8－54)式和(8－52)式，可以得到奇模的本征值 k_1 和 k_2。这里仍然采用图解法，如图 8－10 所示。

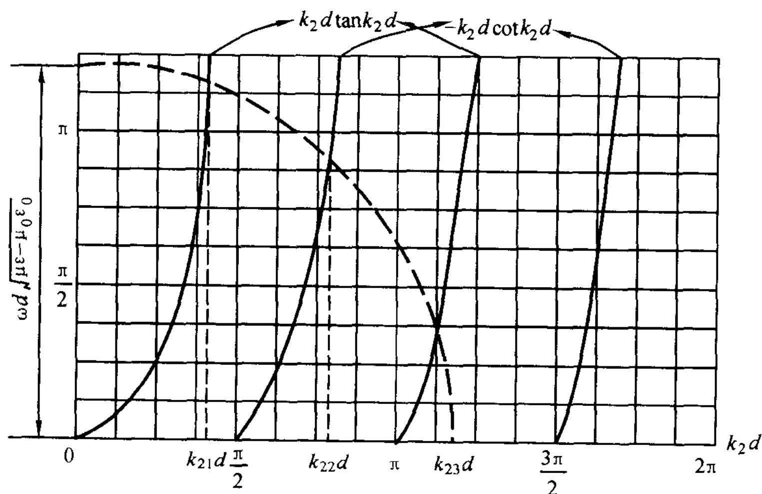


图 8－10　平板介质波导的特征方程的图解

从图 8－10 中可以看出，当频率变化时，圆的半径以及与圆的交点也随之变化。频率愈高，圆的半径愈大，与圆相交的曲线也就增加，说明介质波导中可以传播更多的模式。把曲线与圆相交点上的 k_1、k_2 值按大小顺序排列：$(k_1、k_2)_0,(k_1,k_2)_1,\cdots$,对应的 TE 波模式为 TE_0、TE_1，TE_2，…。

截止频率是指传播波型能够存在的最低频率。显然，在 $\gamma^2\to-(\omega^2\mu_0\varepsilon_0)$ 时发生截止。在此情况下，因 $k_1\to0$，所以场量沿 x 方向就没有衰减。这样，$k_1=0$ 对应着临界状态。在本征值方程中，令 $k_1=0$，

$$\cot k_2 d = 0 \qquad 或 \qquad k_2 d = \frac{(2n+1)\pi}{2} \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

将上式代入(8-52)式中，可得 TE 波偶模的截止频率

$$f_c = \frac{2n+1}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}} \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{8-55}$$

同理，可得 TE 波奇模的截止频率

$$f_c = \frac{2n}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}} \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{8-56}$$

对于基本的 TE_0 模，$f_c=0$。设 $d=3\times10^{-6}$m，$\varepsilon=1.47\varepsilon_0$，可求出第一个高阶 TE_1 模的截止频率为

$$f_c = \frac{3\times10^8}{4\times3\times10^{-6}\times\sqrt{0.47}} = 0.365\times10^{14}\text{Hz} = 36.5\ \text{THz}$$

因此，在 36.5 THz 以下，介质板内的导行电磁波能实现 TE_0 单模传输。

但需要注意，截止频率的概念对于介质波导有着与金属波导不同的解释。对于金属波导，在截止频率 f_c 以下，其截止波型为衰减场。然而，对于介质波导，在截止频率 f_c 以上，它可以无衰减(γ 是纯虚数)传播某种模式；在 f_c 以下，传播就有衰减($\gamma=\alpha+j\beta$)，即介质波导的截止波型为辐射场。由于介质是无损耗的，这衰减必然表现为波在行进中的能量辐射，把工作于辐射模式的介质波导(在 f_c 以下)可用作天线。

8.3.3 TM 波

此时 $\dot{E}_z\neq0$，$\dot{H}_z=0$。TM 波的分析方法及特点与 TE 波相类似，偶模情况的本征值方程为

$$k_1 d = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}k_2 d\cot k_2 d \tag{8-57}$$

奇模情况的本征值方程为

$$k_1 d = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}k_2 d\tan k_2 d \tag{8-58}$$

TM 波与 TE 波具有相同的截止频率，因此不再讨论。

除了上面介绍的介质板波导能传播电磁波外，其它能传播电磁波的开放式介质波导还有平面导体上的介质片、介质棒等。它们的分析方法与上面相似。开放式波导之所以能传输电磁波，在于它能将分布在空间中的电磁波能量的主要部分约束在波导表面附近。因此，介质波导传输的电磁波也称为表面波。

介质波导的工作原理还可解释为，利用了从光密媒质到光疏媒质分界面上波的全反射。例如，若有一个介质棒，其介电常数 ε_1 大于周围媒质的介电常

数 ε_2，且入射波射线和分界面法线间的夹角 θ_i 大于临界角 θ_c 时，由分界面出现全反射，电磁波就可沿介质棒跳跃式前进(见图 8－11)。这就是介质波导的工作原理的一种简明解释。

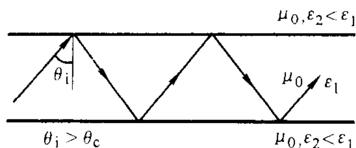


图 8－11　介质棒波导

习　题　(8－3)

8－3－1　证明：介质波导传播的电磁波速度介于电介质和介质外自由空间中的平面波传播速度之间。

§8－4　谐　振　腔

低频无线电技术中采用 LC 回路产生电磁振荡。当频率很高时(例如微波范围)，这种振荡回路有强烈的辐射损耗和焦耳损耗，不能有效地产生高频振荡。因此，必须用另一种振荡器——谐振腔来激发高频电磁振荡。谐振腔是一种适用于高频的谐振元件，它是用理想导体围成的空腔。凡是用理想导体围成的任意形状的空腔都有共振现象，具有 LC 回路的性质，称为谐振腔。谐振腔可以将电磁振荡全部约束在空腔内，电磁场没有辐射，也没有介质损耗，金属导体的焦耳损耗很小，因此具有较高的品质因数。它在微波频段中广泛用于波长计、滤波器等器件。这一节将以矩形谐振腔为例，讨论谐振腔的性质。

8.4.1　谐振腔中的场结构

一段长为 l 的矩形波导，两端用金属板将它封闭起来就构成了矩形谐振腔，如图 8－12 所示。由于这两个导体端面对电磁导波的反射作用，波将在其间来回反射，而形成驻波。驻波不能传输电磁能量，它只能产生电磁能的相互转换，在能量转换过程中表现出振荡现象。所以封闭的导体空腔可用来作电磁振荡的谐振器。

对于矩形谐振腔，可不按普遍方法来解，而是从矩形波导管的解出发，利用波的反射定律来讨论，这要简单得多。现在选择 z 轴为参考的“传播方向”，按相对于 z 轴的 TE 模、TM 模来分别讨论。

TE 振荡模式

此时 $\dot{E}_z=0$，$\dot{H}_z\neq0$。由前面的讨论知道，无限长矩形波导中的电磁波沿 x、y 方向都是驻波，沿 z 方向为行波。但在谐振腔内，由于位于 $z=l$ 处的导体端面的反射，出现沿($-z$)方向的反射波。因此，由矩形波导的解(8－33)式，不难得矩形谐振腔内 TE 振荡模式的 $\dot{H}_z$ 的表示式为

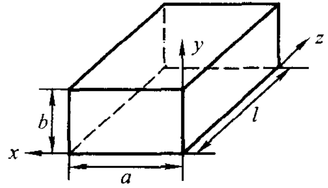


图 8－12 矩形谐振腔

$$\dot{H}_z=(A^+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+A^-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z})\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{8-59}$$

式中 A^+ 和 A^- 分别为向正 z 和负 z 方向传播的 TE 波的振幅常数。

在 $z=0$ 处，由于 $\dot{H}_z=0$，有

$$A^+=-A^-$$

所以(8－59)式写为

$$\dot{H}_z=-\mathrm{j}2A^+\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\beta z \tag{8-60}$$

在 $z=l$，也有 $\dot{H}_z=0$，则有

$$\sin\beta l=0$$

必须取

$$\beta l=p\pi,\qquad 即\ \beta=\frac{p\pi}{l},\quad (p=1,2,3,\cdots) \tag{8-61}$$

于是，得 TE 振荡模式的场分量 $\dot{H}_z$ 的表示式为

$$\dot{H}_z=-\mathrm{j}2A^+\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{p\pi z}{l} \tag{8-62}$$

根据电磁场基本方程组，TE 振荡模式的其它场分量可以由 $\dot{H}_z$ 求得如下

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x&=\frac{2\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A^+\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{E}_y&=-\frac{2\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A^+\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{H}_x&=\frac{2\mathrm{j}}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)A^+\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{H}_y&=\frac{2\mathrm{j}}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)A^+\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{H}_z&=-2\mathrm{j}A^+\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8-63}$$

式中的 k_c^2 由(8－34)式给出，即

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{8-64}$$

(8－62)式和(8－63)式说明，谐振腔中存在着无穷多个 TE 振荡模式。对于不同的(m,n,p)值，有不同的场分布。因此，为表示谐振腔内的 TE 振荡模式，需要用三个下标(m,n,p)，并以 TE_{mnp}表示。这两个表示式还说明，矩形谐振腔中的电磁波沿 x、y 和 z 方向都是驻波，表现出振荡现象。

TM 振荡模式

此时 $\dot{E}_z \neq 0$，$\dot{H}_z = 0$。类似地，可以得到 TM 振荡模式的各个场分量为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_x &= -\frac{2}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{E}_y &= -\frac{2}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{E}_z &= 2E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{H}_x &= \mathrm{j}\frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)\\
\dot{H}_y &= -\mathrm{j}\frac{2\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)
\end{aligned}\right\} \tag{8-65}$$

式中的 k_c^2 由(6－64)式给出。

谐振腔中也存在着无穷多个 TM 振荡模式，并以 TM_{mnp}表示。

8.4.2　谐振腔的谐振频率

谐振频率是谐振腔最重要的一个参数。当电场和磁场沿 x、y、z 三个方向都形成驻波时，即达到谐振条件。根据波动方程(8－5)式和(8－6)式，在矩形谐振腔中，场量所满足的波动方程如下

$$\frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\boldsymbol{E}}}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}} = 0 \tag{8-66}$$

将前面推导的谐振腔中任一场分量代入上式，可得

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{8-67}$$

(8－67)式就是谐振腔中能够存在电磁振荡时，角频率 ω 所必须满足的条件。由它得到谐振腔中的 TE_{mnp}和 TM_{mnp}振荡模式的谐振角频率

$$(\omega_0)_{m,n,p} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \tag{8-68}$$

或谐振频率

$$(f_0)_{m,n,p}=\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2} \tag{8-69}$$

对应的谐振波长为

$$(\lambda_0)_{m,n,p}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{l}\right)^2}} \tag{8-70}$$

这表明，当腔的尺寸 a、b 和 l 给定时，随着 m、n 和 l 取一系列不同的整数，即得出腔内一系列不连续的谐振频率 f_0。频率的不连续性是封闭的金属空腔中电磁场的一个重要特性。这是由于边界条件的要求，腔内电磁场的频率只能取一系列特定的、不连续的数值，这是约束在空间有限范围内的波的普遍性。这一点又与无限空间中的电磁波不同。无限空间中波的频率由激发它的源的频率决定，因而可以连续变化。

这里还要强调的是，在空腔尺寸一定的情况下，由于 m、n 和 p 的不同组合，也可构成具有相同的谐振频率的不同模式。把具有相同的谐振频率的不同模式叫做简并模式。对于给定的谐振腔尺寸，谐振频率最低的模式称为主模。当腔的尺寸 $a>b>l$ 时，最低频率的谐振模式为(1,1,0)，其谐振频率为

$$f_0=\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} \tag{8-71}$$

谐振波长为

$$\lambda_0=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}} \tag{8-72}$$

此波长与谐振腔的几何尺寸同数量级。在微波技术中通常用谐振腔的最低模式来产生特定频率的电磁振荡。

例 8-3　有一填充空气的矩形谐振腔，其沿 x、y、z 方向的尺寸分别为(1)$a>b>l$；(2)$a>l>b$；(3)$a=b=l$。试确定相应的主模和谐振频率。

解: 选择 z 轴作为参考的“传播方向”。首先，对 TM_{mnp} 模式，由(8-65)式，表明 m 和 n 均不可为零，而 p 可为零。其次，对于 TE_{mnp} 模式，由(8-63)式，表明 m 或 n 均可为零(但不能同时为零)，但 p 不能为零。因此，最低阶的模式为

$$TM_{110}\qquad TE_{011}\qquad TE_{101}$$

TM 和 TE 模的谐振频率由(8-69)式给出。

(1) 当 $a>b>l$ 时，**最低谐振频率为**

$$(f_0)_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

于是得 TM_{110}模为主模。

（2）$a>l>b$ 时，最低谐振频率为

$$(f_0)_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{l^2}}$$

于是 TE_{101}为主模

（3）$a=b=l$ 时，TE_{011}、TM_{110}、TE_{101}的谐振频率相同

$$(f_0)_{110} = (f_0)_{011} = (f_0)_{101} = \frac{1}{\sqrt{2}a\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

8.4.3　谐振腔的品质因素

谐振腔可以储存电场和磁场能量。在实际的谐振腔中，由于腔壁的电导率是有限值，这样将导致能量的损耗。和其它谐振回路一样，谐振腔的品质因素 Q 定义为

$$Q = 2\pi\frac{W}{W_T} \tag{8-73}$$

式中的 W 为腔中的储能，W_T 为一周期内腔中损耗的能量。设 P_L 为谐振腔内的时间平均功率损耗，则一个周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$内腔中损耗的能量 $W_T=P_L\frac{2\pi}{\omega}$，故(8－73)式可表示为

$$Q = \omega\frac{W}{P_L} \tag{8-74}$$

确定谐振腔在谐振频率的 Q 值时，通常是假设损耗足够少，以致可以应用无损耗时的场分布。

习　题　(8－4)

8－4－1　有一空气填充的矩形谐振腔的尺寸为 $a=3.8$ cm，$b=1.9$ cm、$l=3.26$ cm，试求 $m=1$，$n=0$，$p=1$ 的振荡模式的谐振频率。

8－4－2　有两个矩形空气谐振腔，工作模式都是 TE_{101}，谐振波长分别为 $\lambda_0=3$ cm 和 $\lambda_0=10$ cm。试问哪一个空腔的尺寸大？为什么？

提　要

1. 依据电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 沿波前进方向的纵向分量的存在情况，将波导中

传播的导行电磁波分为三种波型：TEM 波型、TE 波型和 TM 波型。

凡能维持二维静态场的导波系统，都能传输 TEM 波。传输 TEM 波必须要有二个以上的导体。例如二线传输线、同轴线等。空心金属波导管仅能传输 TE 波和 TM 波。

2. 若波导轴线沿 z 方向，那么波导内的电场分量 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}$ 可以分别表示成

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}(x,y)\,\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H}(x,y)\,\mathrm{e}^{-\gamma z}$$

且 $\boldsymbol{E}(x,y)$ 和 $\boldsymbol{H}(x,y)$ 满足微分方程

$$\nabla_t^2\boldsymbol{E}(x,y) + k_c^2\boldsymbol{E}(x,y) = 0$$

$$\nabla_t^2\boldsymbol{H}(x,y) + k_c^2\boldsymbol{H}(x,y) = 0$$

其中

$$k_c^2 = \omega^2\mu\varepsilon + \gamma^2 = k^2 + \gamma^2$$

k_c 与波导的几何形状大小有关。

3. 波导中纵向电场分量 $E_z(x,y)$ 和磁场分量 $H_z(x,y)$ 满足如下微分方程

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_c^2 H_z = 0$$

波导中横向电场分量和磁场分量则由下列关系式给出

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathrm{j}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2}\left(-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y} + \mathrm{j}\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)$$

$$H_y = -\frac{1}{k_c^2}\left(\mathrm{j}\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

4. 波导管中传播的 TE 波和 TM 波的截止频率为

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

相应的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$$

TEM 波没有截止频率和截止波长。当工作频率 f 比截止频率 f_c 高或工作波长 λ 比截止波长 λ_c 短时，电磁波才可以在波导管内传播；反之，不能在波导管内传播。

当 $f>f_c$ 时，

$$\gamma = j\beta$$

$$\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

β 称为电磁波传输的相位常数。

波导波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

式中 $\lambda\left(=\frac{v}{f}\right)$ 为无限大理想介质中的波长。

波传播的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

5. 矩形波导中传播的 TE 波($\dot{E}_z=0,\dot{H}_z\neq0$)的各分量为

$$\dot{E}_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{E}_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_x = \frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_z = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

式中 m，n 为任何正整数和零，但不能同时为零。取不同 m 和 n 值，称为不同的模式，用 TE_{mn} 模表示。不存在 TE_{00} 模。此外

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

矩形波导中传播的 TM 波($\dot{E}_z\neq0,\dot{H}_z=0$)的各分量为

$$\dot{E}_z = A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{E}_x = -\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{E}_y = -\frac{\gamma}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{n\pi}{b}\right)A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

$$\dot{H}_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}$$

取不同 m 和 n 值，称为不同的模式，用 TM_{mn} 表示。不存在 TM_{00}、TM_{0n} 及 TM_{m0} 模。

6. 矩形波导的截止频率为

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

相应的截止波长为

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

具有最长截止波长(或最低截止频率)的模式，称为最低模式，也称为主模，其它模式都称为高次模。

TE_{10} 模是矩形波导中的主模。

7. 平板介质波导中波的传播模式为 TE 波和 TM 波，其中又有偶模和奇模之分。截止频率为

$$f_c = \frac{n}{4d\sqrt{\mu_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}} \qquad \begin{cases} n = 0,2,4,\cdots \text{奇模} \\ n = 1,3,5,\cdots \text{偶模} \end{cases}$$

对于介质波导，在截止频率 f_c 以上，它可以无衰减地传播某种模式；而在 f_c 以下，传播就有衰减，这时传播的才是表面波。

8. 谐振腔是一种适用于高频的谐振元件。

矩形谐振腔内沿 x、y、z 方向的电磁波都是驻波。如果选择 z 轴为参考的“传播方向”，也存在相对于 z 轴的 TE 模和 TM 模。它们的谐振频率都是

$$(f_0)_{m,n,p} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}$$

相应的谐振波长为

$$(\lambda_0)_{m,n,p} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}$$

思　考　题

8-1　什么是横电磁波？它具有什么特点？举例说明。

8-2　什么是横电波？什么是横磁波？它们之间有什么区别？

8-3　什么是截止波长？什么是波导波长？什么是工作波长？

8-4　介质波导的截止频率与金属波导的截止频率在概念上有何不同？

8-5　金属波导管内能传播的电磁波都有哪几类？

8-6　什么是谐振腔的谐振频率和谐振波长？

习　　题

8-1　求矩形波导中 TM_{11}模在波导壁上的电流密度。

8-2　空气充填的矩形波导，$a=2.3$ cm，$b=1$ cm。若 $f=20$ GHz，求 TM_{11}模的 f_c、β、λ_g、v_p；又若 $f=10$ GHz，求传播常数 γ。

8-3　如上题的波导，求 TE_{10}、TE_{01}、TE_{20}、TE_{11}、TM_{11}、TM_{21}、TM_{12}的截止频率；$f=10$ GHz 时，可能有哪些传播模？若充填 $\varepsilon_r=2$、$\mu_r=1$ 的介质结果又如何？

8-4　空气充填的矩形波导，$a=7.2$ cm，$b=3.4$ cm。(1)当工作波长($\lambda=c/f$)分别是16 cm、8 cm、6.5 cm时，此波导可能出现哪几个传播模？(2)求 TE_{10}单模传输的频率范围，并要求此频带的低端比 TE_{10}的 f_c 大5%，其高端则比第1阶模的 f_c 低5%。

8-5　一频率为10 GHz的横电波在一矩形波导中传输，磁场的纵向分量表达式为

$$\dot{H}_z=\left(10^{-3}\cos\frac{\pi}{3}x\cos\frac{\pi}{3}ye^{-\gamma z}\right)\text{A/m}$$

其传播常数为

$$\gamma=\text{j}\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\ \text{rad/cm}$$

式中，x 和 y 均以 cm 为单位。试求波导内其他场分量的表示式，并求出 λ_g、λ_c、v_p 和 v_g 各量。

8-6　如果用BJ-100的矩形波导($a\times b=22.86\times10.16$ mm^2)来传输电磁波能量，波导中的介质为空气，试计算：

(1) 当工作波长 $\lambda_0=20$ mm 时，波导中能存在哪些波型？

(2) 波导中传输 TE_{10}模，且 $\lambda_0=30$ mm 时，v_p、v_g、λ_c、λ_g 各为多少？

8-7　在一矩形空腔谐振腔中激发 TE_{101}型波。设空腔的尺寸为 $a\times b\times l=5\times3\times5$ cm^3，求谐振波长。

8-8　当上题中的腔体充以 $\varepsilon_r=4$ 的介质时，若空腔的原尺寸不变，激发的波型也不变，谐振频率为多少？

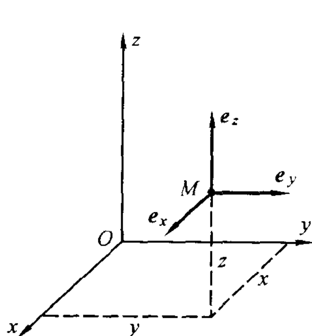
8-9　若用一矩形波导制成一矩形谐振腔，要求当 $\lambda=10$ cm 时对 TE_{101}振荡模式发生谐振，当 $\lambda_0=5$ cm 时，对 TE_{103}模式发生谐振，求此矩形空腔谐振腔的尺寸。

附录一　矢 量 分 析

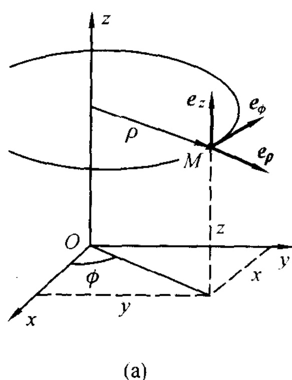
矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具。它对简化公式，明确概念，掌握观察规律的实质有着极大的裨益。它也是学习电磁场入门的数学基础。本附录将比较详细地介绍这部分内容，着重介绍梯度、散度和旋度的概念及其运算。在一些理论的论述和证明中，没有采取纯数学的论证方式，而是侧重于阐明理论所内涵的物理概念及应用手段。

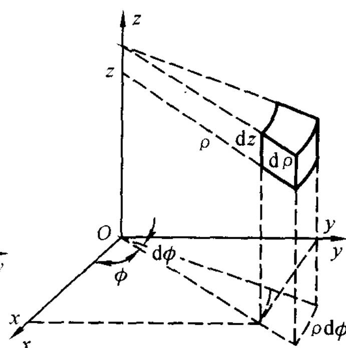
§1　正交坐标系

三种常用正交坐标系(分别见附图 1－1、附图 1－2 和附图 1－3)以及各正交坐标系之间的关系如表附 1－1 所示。

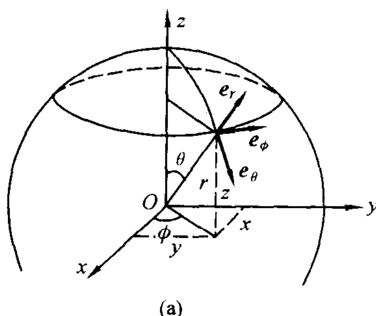


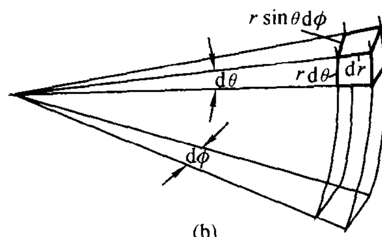
附图 1－1　直角坐标系





附图 1－2　圆柱坐标系





附图 1－3　球坐标系

表附 1-1

坐标系	单位向量	元长度	元面积	元体积	与其它坐标系关系	与其它单位矢量关系
直角坐标 x,y,z (附图 1-1)	$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$	$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_x dx + \boldsymbol{e}_y dy + \boldsymbol{e}_z dz$	$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_x dydz + \boldsymbol{e}_y dzdx + \boldsymbol{e}_z dxdy$	$dV = dxdydz$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\phi = \arctan y/x$ $z = z$ 和 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\phi = \arctan y/x$	$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_x \cos\phi + \boldsymbol{e}_y \sin\phi$ $\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\phi$ $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y \sin\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_z \cos\theta$ $\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x \cos\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\theta\sin\phi - \boldsymbol{e}_z \sin\theta$ $\boldsymbol{e}_\phi = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi + \boldsymbol{e}_y \cos\phi$
圆柱坐标 ρ,ϕ,z (附图 1-2)	$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$	$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_\rho d\rho + \boldsymbol{e}_\phi \rho d\phi + \boldsymbol{e}_z dz$	$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_\rho \rho d\phi dz + \boldsymbol{e}_\phi d\rho dz + \boldsymbol{e}_z \rho d\rho d\phi$	$dV = \rho d\rho d\phi dz$	$x = \rho\cos\phi$ $y = \rho\sin\phi$ $z = z$ 和 $r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta = \arctan \rho/z$ $\phi = \phi$	$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_\rho \cos\phi - \boldsymbol{e}_\phi \sin\phi$ $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_\rho \sin\phi + \boldsymbol{e}_\phi \cos\phi$ $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z$ 和 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\rho \sin\theta - \boldsymbol{e}_z \cos\theta$ $\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\rho \cos\theta - \boldsymbol{e}_z \sin\theta$ $\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_\phi$
球坐标 r,ϕ,θ (附图 1-3)	$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$	$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_r dr + \boldsymbol{e}_\theta r d\theta + \boldsymbol{e}_\phi r\sin\theta d\phi$	$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_r r^2 \sin\theta d\phi d\theta + \boldsymbol{e}_\theta r\sin\theta dr d\phi + \boldsymbol{e}_\phi r dr d\theta$	$dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$	$x = r\sin\theta\cos\phi$ $y = r\sin\theta\sin\phi$ $z = r\cos\theta$ 和 $\rho = r\sin\theta$ $\phi = \phi$ $z = r\cos\theta$	$\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_r \sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\cos\phi - \boldsymbol{e}_\phi \sin\phi$ $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_\phi \cos\phi$ $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_\phi \cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_r \sin\theta + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta$ $\boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_\phi$ $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r \cos\theta - \boldsymbol{e}_r \sin\theta$

§2　标量场与矢量场

2.1　标量场与矢量场的概念

分布着某种物理量的空间区域称为该物理量的场。如果这个物理量是标量，就称为标量场；若为矢量，就称为矢量场。例如，温度场、压力场等都是标量场；速度场、电场、磁场等都是矢量场。不随时间变化的场称为静态场；反之，则称为动态场或时变场。

标量场中各点的量值 φ 是空间坐标(x,y,z)的一个标量函数，即标量场 φ 可用一个标量函数$\varphi=\varphi(x,y,z)$来表示；矢量场 $\boldsymbol{A}$ 则可用一个矢量函数$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x,y,z)$来表示。$\varphi(x,y,z)$或 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$表示了物理量 φ 或$\boldsymbol{A}$ 在空间区域中的分布情况。

2.2　标量场的等值面

标量场的分布可以用等值面来直观形象地描绘。等值面是这样一种空间曲面，在该曲面上任一点的函数值相等，即

$$\varphi(x,y,z)=C \tag{1}$$

式中 C 是常数。随着 C 的取值不同，可获得一系列不同的等值面，这族等值面充满了场所存在的整个空间中。一般情况下，φ 是单值函数，所以这些等值面互不相交。比如电位场中的等位面，温度场中的等温面等。

在平行平面标量场中，函数 $\varphi(x,y)$具有相同函数值的点所组成的曲线称为等值线：$\varphi(x,y)=C$。例如地形图中的等高线，地面气象图上的等温线等。

2.3　矢量场的矢量线

为了形象地描绘矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的分布，引入矢量场的矢量线的概念。在矢量场中，矢量线就是这样的曲线，在它上面每一点处的切线方向都与矢量场在该点的方向相同，如附图 1-4 所示。例如，静电场中的电力线，流速场中的流线等。矢量场中的矢量线也充满了整个场域，但它们互不相交。

根据矢量线的定义，矢量线的方程可以写为

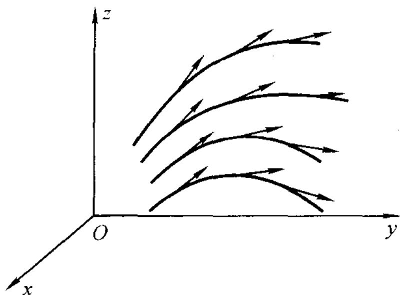
$$\boldsymbol{A}\times \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{2}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是矢量线的线元。在直角坐标系中，上式可展开为

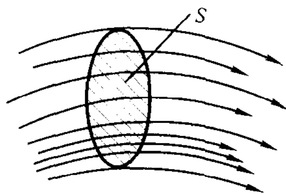
$$\frac{A_x}{\mathrm{d}x}=\frac{A_y}{\mathrm{d}y}=\frac{A_z}{\mathrm{d}z} \tag{3}$$

这就是矢量线的微分方程。

作出通过场域内某一曲面 S 上所有点的矢量线，则这些矢量线的全体构成一个管状区域如附图 1-5 所示，称为矢量管。



附图 1-4　矢量线



附图 1-5　矢量管

§3　标量场的梯度

研究一个标量场，不仅要掌握物理量 φ 在空间的分布情况，更为重要的是要知道它的变化规律以及与其它物理量之间的相互关系。下面将介绍标量场的方向导数和梯度。

3.1　方向导数

由高等数学可知：函数 $\varphi(P)$ 从点 P_0 沿路经 l 变到点 P 的变化率称为方向导数，记作 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{4}$$

式中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦，$\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量可以表示为 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma$。

方向导数解决了标量场中 $\varphi(P)$ 在给定点处沿某一方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化率问题。但是，函数 $\varphi(P)$ 从给定点出发有无穷多个变化方向，其中哪个方向的变化率最大？最大变化率是多少？这是下面要进一步探讨的问题。

设矢量 $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$，那么(4)式可以写成矢量 $\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{e}_l$ 的标积，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial l}&=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma)\\&=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{e}_l=|\boldsymbol{g}|\cos(\boldsymbol{g},\boldsymbol{e}_l)\end{aligned} \tag{5}$$

上式表明：标量函数 φ 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数就是矢量 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{l}$ 上的投影。因 $\boldsymbol{g}$ 在给定点处是一个固定的矢量，所以只有当 $\boldsymbol{l}$ 的方向与 $\boldsymbol{g}$ 方向一致时，$\cos(\boldsymbol{g},\boldsymbol{e}_l)=1$，$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=|\boldsymbol{g}|$，方向导数才取得最大值，此时 φ 增加得最快；当 $\boldsymbol{l}$ 方向与

$\boldsymbol{g}$ 方向垂直时，$\cos(\boldsymbol{g},\boldsymbol{e}_l)=0$，方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=0$；当 $\boldsymbol{l}$ 方向与 $\boldsymbol{g}$ 方向相反时，$\cos(\boldsymbol{g},\boldsymbol{e}_l)=-1$，方向导数$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=-|\boldsymbol{g}|$取得最小值，此时 φ 减小得最快。

3.2 梯度

定义矢量函数 $\boldsymbol{g}$ 为标量场 φ 的梯度，记作 $\mathrm{grad}\varphi$。由上述可知，在直角坐标系中，

$$\mathrm{grad}\varphi = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{6}$$

显然梯度是这样一个矢量：它的方向就是使得函数 $\varphi(P)$的方向导数取最大值的那个方向，其模等于这个最大方向导数的值。

为了表达方便，我们引进一个矢量性的算子

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

称为哈密顿算子。因此，函数 φ 的梯度可以表示为

$$\mathrm{grad}\ \varphi = \nabla\varphi \tag{8}$$

例 1 试证明在点电荷 q 产生的静电场中，电位函数 φ 的负梯度等于电场强度 $\boldsymbol{E}$。

解：在大学物理中已经知道，点电荷 q 产生的电位和电场强度分别为 $\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 和 $\boldsymbol{E}=\frac{q\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，而

$$-\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{q(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)} = \frac{q\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

由此可见，在静电场中电位与电场强度满足 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 的关系。

§4 矢量场的通量与散度

为了描述矢量场在空间中的变化情况，引入矢量场的散度和旋度的概念。这一节先讨论矢量场的散度。

4.1 矢量场的通量

在矢量场中，取一个曲面 S（$\boldsymbol{e}_n$ 为曲面 S 的单位法向矢量），那么矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 S 上的面积分

$$\Phi = \int_S A_n \mathrm{d}S = \int_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{9}$$

称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 S 的通量。其中 A_n 为 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_n$ 上的投影。在直角坐标系下，有

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S (A_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y) \tag{10}$$

下面以流速场为例来说明通量的意义。流速场 $\boldsymbol{v}$ 的通量

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示单位时间内流体穿过 S 的流量。如果 S 为一闭合曲面，一般总是取其外侧为正侧，即取 $\boldsymbol{e}_n$ 由内侧指向外侧，这时

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示穿出闭合面 S 的净流量，它等于流体从 S 内流出的流量与从外流入 S 的流量之差。$\Phi>0$ 表示流出多于流入，说明 S 所包围的区域 V 内必有产生流体的“源”。$\Phi<0$ 说明 V 内必有吸收流体的“洞”，或称为产生流体的负源。$\Phi=0$ 表示流出与流入 S 的流体相等，说明 V 内无源或正源等于负源。关于通量源的物理意义，应视具体的场而定。比如，静电场中的正电荷即是发生电通量的正源，负电荷即为汇集电通量的负源。

4.2　矢量场的散度

通量是一个积分量，它是从整体上刻划了 S 所围区域 V 中矢量线总的发散情况，而没有说明闭合面内每点处的性质。为了描述 V 中某一点附近矢量 $\boldsymbol{A}$ 的通量的性质，引出散度的概念。

在直角坐标系中，设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z$，根据奥氏公式

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \oint_S (A_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + A_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x + A_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y) \\ &= \int_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{11}$$

可见，通量可看成是 V 内各点处的发散强度 $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ 的体积分。

由上所述，可以给出散度的定义：设矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z$，则称

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 P 点处的散度，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{或} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{12}$$

因此，奥氏公式可以写成

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V \tag{13}$$

上式也称为高斯散度定理。它表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿出闭合面 S 的通量等于其散度在 S 所包围区域 V 内的体积分。

下面从散度的极限表达式来看它的物理意义。设 P 为场域 V 中的一点，现作包围 P 点的任一闭合曲面 S，ΔV 是 S 面所围的区域 ΔV。那末，利用奥氏公式，有

$$\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Delta V} \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V$$

利用中值定理

$$\int_{\Delta V} \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V = (\mathrm{div}\boldsymbol{A})_M \Delta V$$

式中 M 为 ΔV 中的某一点，代入奥氏公式后，得

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{A})_M = \frac{1}{\Delta V}\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

令 ΔV 向点 P 收缩，则 M 点就趋向于 P 点，所以在 P 点的散度可由下列极限表示

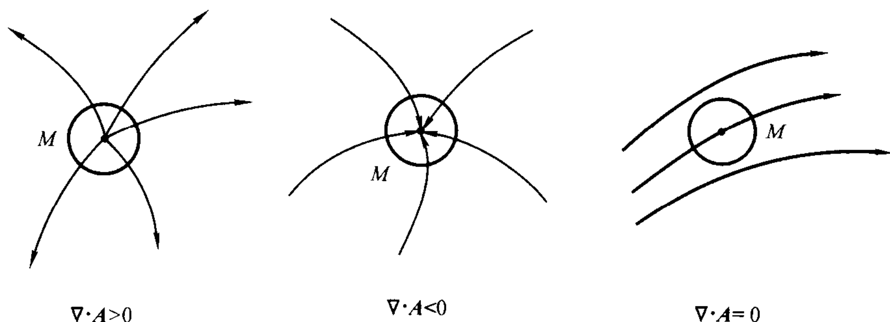
$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{14}$$

若在上式中令 $\Delta \Phi = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} \tag{15}$$

由此可见，散度是通量 Φ 对曲面所围区域的变化率，也可看成通量在 V 中的分布密度。所以 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 也称为通量密度。

根据上述定义可知，在场中某点 P 处，若 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}>0$，则说明该点有发出通量线的正源；若 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}<0$，则表明该点有汇集通量线的负源；若 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，则表明该点既没有正源也没有负源，如附图 1－6 所示。



附图 1－6　散度的意义

§5　矢量场的环量与旋度

5.1　矢量场的环量

在矢量场中，若 L 是其中的一条有向闭曲线，那么矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 L 的线积分

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{16}$$

称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 L 的环量。

环量的物理意义由具体的场而定。例如，在力场 $\boldsymbol{F}$ 中，环量 $\oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 沿闭合路经 L 所作的功。又如在流速场中，$\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，表明流体作无涡旋运动，如水管中的流速场，水流沿平行于水管轴线的方向流动。若 $\oint_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \neq 0$，表明流速场中必定有产生涡旋的源，流体做涡旋运动。

5.2　矢量场的旋度

在直角坐标系中，设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y \mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z$，则环量可以写成

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L (A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z) \tag{17}$$

利用斯托克斯公式于上式，则有

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L (A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z)$$
$$= \int_S \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right]$$

这里，S 是以闭合曲线 L 为周界的曲面，L 的绕行方向与 S 的法向方向符合右手螺旋关系。上式右边的面积分可看作是矢量

$$\boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

穿过曲面 S 的通量，称这个矢量为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$。即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{18}$$

或者用哈密顿算子表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{19}$$

因此，斯托克斯公式可以写成

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{20}$$

下面从旋度的极限表达式来看它的物理意义。设 P 为场域 V 中的一点，作任一经过 P 点，并以 $\boldsymbol{e}_n$ 为该点的曲面元的法线方向的曲面 ΔS，其周界为 L，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿 L 的环量 $\Delta\Gamma$ 为

$$\Delta\Gamma = \oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\Delta S}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Delta S}\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}S$$

其中 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}$ 表示 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 在 S 的法线方向 $\boldsymbol{e}_n$ 上的投影，利用中值定理

$$\int_{\Delta S}\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}S = (\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A})_M\Delta S$$

式中 M 为 ΔS 中的某一点，令 ΔS 向 P 点收缩，则有旋度定义的极限形式

$$\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} \tag{21}$$

由此可见，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 P 处的环量密度即为 $\mathrm{rot}_n\boldsymbol{A}$。显然它与该点的曲面元的法线方向 $\boldsymbol{e}_n$ 有关，当 $\boldsymbol{e}_n$ 与 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 的方向相同时，环量密度取最大值。

综上所述，旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 是这样一个矢量：它的方向就是使得环量密度取最大值时曲面元 ΔS 的方向，其模等于环量密度的最大值。

例 2　有一半径为 ρ_0，载流 I 的无限长直导线产生的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的分布为

$$0<\rho<\rho_0 \qquad \boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho_0^2}\rho\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\rho>\rho_0 \qquad \boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$$

试求 $\boldsymbol{H}$ 的环量及旋度。

解： 在 $0<\rho<\rho_0$ 区域，围绕电流作一半径 $\rho<\rho_0$ 的闭合圆形环路 L，$\boldsymbol{H}$ 的环量为

$$\Gamma = \oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi}\frac{I}{2\pi\rho_0^2}\rho\boldsymbol{e}_\phi\cdot\rho\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi = \frac{I}{\rho_0^2}\rho^2$$

$\boldsymbol{H}$ 的旋度（圆柱坐标系）

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\phi)\right] = \boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{I\rho}{2\pi\rho_0^2}\right)\right] = \boldsymbol{e}_z\frac{I}{\pi\rho_0^2} = \boldsymbol{J}$$

在 $\rho>\rho_0$ 区域，围绕电流作一半径 $\rho>\rho_0$ 的闭合圆形环路 L，那么环量及旋度分别为

$$\Gamma = \oint_L\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi\right)\cdot(\rho\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi) = I$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\phi)\right] = \boldsymbol{e}_z\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{I}{2\pi\rho}\right)\right] = 0$$

由此看出，沿围绕电流的闭合环路 L 的环量不为零，表明必定有产生磁场的旋涡源，这个旋涡源就是电流。在存在电流的区域中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的旋度不为零而等于电流密度 $\boldsymbol{J}$。在无电流区域中，$\boldsymbol{H}$ 的旋度等于零。

§6　无源场和无旋场

这一节介绍两种重要的场——无源场和无旋场，及其它们的性质。

6.1　无源场

设有矢量场 $\boldsymbol{A}$，如果在场域中每一点处恒有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{22}$$

那么称 $\boldsymbol{A}$ 为无源场。无源场有如下两个重要的性质：

性质 1　在无源场中穿过场域 V 中任一个矢量管的所有截面的通量都相等。

证明：设 $\boldsymbol{A}$ 为无源场，在场域 V 中任取一矢量管，矢量管的上、下端面及侧面分别为 S_1、S_2 和 S_3，面的法线方向均由内侧指向外侧，如附图 1－7 所示。

由奥氏公式及 $\boldsymbol{A}$ 的无源性，有

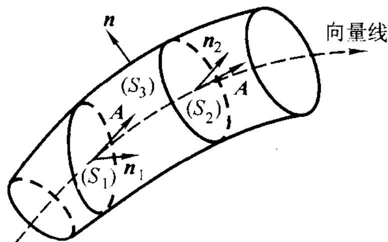
$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = 0$$

于是

$$-\int_{S_1} A_{n1} \mathrm{d}S + \int_{S_2} A_{n2} \mathrm{d}S + \int_{S_3} A_{n3} \mathrm{d}S = 0$$

由于 S_3 是矢量管的侧面，故 $A_{n3} = 0$，而 S_1 的法线方向与 $\boldsymbol{A}$ 的方向相反，所以有

$$\int_{S_1} A_{n1} \mathrm{d}S = \int_{S_2} A_{n2} \mathrm{d}S$$



附图 1－7　一段矢量管

故此证明了矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过矢量管的任意两个截面的通量相等。在磁场中，这一性质又称为磁通连续性原理。

性质 2　无源场存在着矢势。

很容易证明，任一矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度再取散度恒等于零，即

$$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{F} = 0$$

也就是说旋度场($\nabla \times \boldsymbol{F} \neq 0$)一定是无源场。换言之，一个无源场 $\boldsymbol{A}$ 必存在另一矢量场 $\boldsymbol{F}$，使得

$$\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{F}$$

满足上式的矢量场 $\boldsymbol{F}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的矢势。比如在恒定磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是一

无源场($\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$)，它可用磁矢位(矢势)$\boldsymbol{A}$ 来表示，即 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$。

6.2 无旋场

设有矢量场 $\boldsymbol{A}$，如果在场域中每一点处恒有

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

那么称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场。它有如下两个重要的性质：

性质 1 在无旋场中，$\boldsymbol{A}$ 沿场域 V 中任意闭合路径 L 的环量等于零，即

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

例如在静电场中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 满足 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$,称 $\boldsymbol{E}$ 为无旋场(也称保守场)。在静电场中，电场力作功与路径无关。

性质 2 无旋场 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为某一函数 $\varphi(P)$的梯度场。

容易证明：任意一个标量场的梯度再取旋度后恒等于零，即 $\nabla\times\nabla\varphi=0$。也就是说梯度场($\nabla\varphi\neq0$)一定是无旋场，反之，一个无旋场 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为某一标量场 $\varphi(P)$的梯度场，即 $\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$。这个矢量场称为位势场，$\varphi(P)$称为 $\boldsymbol{A}$ 的位函数，因此，位势场是无旋场。比如在静电场中，把电位 φ 称为电场 $\boldsymbol{E}$ 的位函数，它们之间满足 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 的关系。

6.3 调和场

散度和旋度都等于零的矢量场称为调和场。

调和场 $\boldsymbol{A}$ 是无源无旋场，因为 $\boldsymbol{A}$ 是无旋场，所以存在一位函数 φ，使 $\boldsymbol{A}=\nabla\varphi$，又因 $\boldsymbol{A}$ 是无源场，于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\nabla\varphi=0$$

两个哈密顿算子的标积是拉普拉斯算子，即

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\nabla^2$$

因此，调和场的位函数 φ 必定满足方程

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{23}$$

这个二阶偏微分方程称为拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程，且具有二阶连续偏导数的函数称为调和函数。

拉普拉斯方程描写的是无源无旋场，若矢量场仅为无旋场，那么矢量场的位函数满足泊松方程。例如，在点电荷产生的静电场中，电场与电位满足关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，其中 $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}(r\neq0)$是电场 $\boldsymbol{E}$ 的电位，所以静电场是无旋场。同时可以证明在 $r\neq0$ 处(即无自由电荷区域)$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，可见 $\boldsymbol{E}$ 是调和场，它的位函数 φ 是调和函数。如果是连续分布的源，设体电荷密度 ρ，则 $\boldsymbol{E}$ 的散

度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0 \tag{24}$$

$\boldsymbol{E}$ 的旋度仍为零，那么它的位函数必满足

$$\nabla \cdot (-\nabla \varphi) = \rho/\varepsilon_0$$

即满足

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon_0 \tag{25}$$

这个方程即为泊松方程。其中 ε_0 为真空中的介电常数。

§7 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理可叙述如下：在空间有限区域 V 内的某一矢量场 $\boldsymbol{A}$，由它的散度、旋度和边界条件(即包围 V 的闭合面 S 上的矢量场分布)唯一地确定。它还可以表述为：当给定了矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的通量源密度和旋涡源密度以及场域的边界条件，就可唯一地确定该矢量场。

下面进一步说明该定理的意义。任何一个矢量场都是由“源”激发的，一般来说矢量场既有旋度，又有散度，它可以表示为一个只有散度而旋度为零的矢量场 $\boldsymbol{A}_1$ 和另一个只有旋度而散度为零的矢量场 $\boldsymbol{A}_2$ 之和，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$$

其中$\nabla \times \boldsymbol{A}_1 = 0$，$\nabla \cdot \boldsymbol{A}_2 = 0$。由于 $\boldsymbol{A}_1$ 的散度不为零，设为 ρ，于是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = \nabla \cdot \boldsymbol{A}_1 = \rho$$

同理，$\boldsymbol{A}_2$ 的旋度不为零，设为 $\boldsymbol{J}$，于是

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \times (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2) = \nabla \times \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{J}$$

ρ 和 $\boldsymbol{J}$ 分别是散度和旋度对应的通量源和旋涡源，在电磁场中它们分别是电荷和电流。这就是说，当矢量场的散度和旋度给定后，就相当于确定了“源”的分布，如果场域有限，给定边界条件后，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 就唯一地确定了。

亥姆霍兹定理是研究电磁场理论的一条主线。无论是静态场还是时变场，都是围绕着它们的旋度、散度和边界条件展开理论分析的。

§8 微分算子及矢量运算

8.1 微分算子

在直角坐标系中，哈密顿算子定义为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{26}$$

为此，标量场 $u(x,y,z)$ 的梯度可以写成

$$\text{grad}\, u = \nabla u = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \tag{27}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度表示成

$$\text{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{28}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度表示成

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{29}$$

拉普拉斯算子作用在标量函数 u 的表达式为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{30}$$

拉普拉斯算子作用在矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的表达式为

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial z^2} \tag{31}$$

圆柱坐标系中的有关公式

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho \boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \boldsymbol{e}_z \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{A_\rho}{\rho^2} \right)$$

$$+ \boldsymbol{e}_\phi \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{\rho^2} \right) + \boldsymbol{e}_z \nabla^2 A_z$$

球坐标系中的有关公式

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]$$

$$+ \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r\left[\nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \cot\theta A_\theta + \csc\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$+ \boldsymbol{e}_\theta\left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta A_\theta - 2\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + 2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$+ \boldsymbol{e}_\phi\left[\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2}\left(\csc^2\theta A_\phi - 2\csc\theta\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - 2\cot\theta\csc\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\right]$$

8.2 矢量运算

$$A^2 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla(\varphi+u) = \nabla\varphi + \nabla u$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla\cdot\boldsymbol{B}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\times\boldsymbol{B}$$

$$\nabla(\varphi u) = \varphi\nabla u + u\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\times\nabla\varphi$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

$$\nabla \times (\varphi \nabla u) = \nabla \varphi \times \nabla u$$

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

附录二 电磁单位制

附录二包括三个表。

附表 2－1 列出国际制的部分基本单位

附表 2－2 列出部分国际制中的电磁量单位

附表 2－3 列出部分国际制中的词头

附表 2－1 部分基本单位

量 的 名 称	量 的 符 号	与其它量的关系	国际制单位
电 流	I	电荷/时间	A（安[培]）
长 度	L，l		m（米）
质 量	M，m		kg（千克）
时 间	T，t		s（秒）

附表 2－2 部分电磁量单位

量 的 名 称	量 的 符 号	与其它量的关系	国际制单位
电流	I，i	电荷［量］/时间	A（安）
电荷[量]	Q，q	电流×时间	C（库）
电荷线密度	τ	电荷［量］/长度	C/m（库/米）
电荷面密度	σ	电荷［量］/面积	C/m^2（库/米^2）
电荷体密度	ρ	电荷［量］/体积	C/m^3（库/米^3）
电动势	$\mathscr{E}$	$\int E_e \cdot dl$	V（伏）
电位	φ，V	功/电荷量	V（伏）
电压	U		
电场强度	E	$\frac{电压}{长度}=\frac{力}{电量}$	V/m（伏/米）
电通[量]	Ψ	电荷量$=\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S}$	C（库）
电通[量]密度	D	电荷量/面积	C/m^2（库/米^2）
电容	C	电荷量/电压	F（法）
介电常数	ε	电容/长度	F/m（法/米）
相对介电常数	ε_r	比值 $\varepsilon/\varepsilon_0$	
电极化强度	P	电矩/体积	C/m^2（库/米^2）
电偶极矩	$p\ (=ql)$	电荷量×长度	C·m（库·米）

续表

量的名称	量的符号	与其它量的关系	国际制单位
电流面密度	J	电流/面积	A/m^2（安/米^2）
电流线密度	A①	电流/长度	A/m（安/米）
磁位差	U_m	$\int \boldsymbol{H}\cdot dl$	A（安）
磁通势	F_m	$\int \boldsymbol{H}\cdot dl$	
磁场强度	H	磁通势/长度	A/m（安/米）
磁通密度 磁感应强度	B	$\frac{力}{电流矩}=\frac{磁通}{面积}$	T（特）
磁通[量]	Φ_m	$\int \boldsymbol{B}\cdot ds$	Wb（韦）
磁链	Ψ_m	磁通×匝数	Wb·t（韦·匝）
磁导率	μ	电感/长度	H/m（亨/米）
相对磁导率	μ_r	比值 μ/μ_0	
磁化强度	M	磁矩/体积	A/m（安/米）
磁偶极矩	m	电流×面积	$A\cdot m^2$（安·米^2）
电阻	R	电压/电流	Ω（欧）
电抗	X	电压/电流	Ω（欧）
阻抗	Z	电压/电流	Ω（欧）
导纳	Y	1/阻抗	S（西门子）
电导	G	1/电阻	S（西门子）
电纳	B	1/电抗	S（西门子）
电阻率	ρ	电阻×长度 =1/电导率	Ω·m（欧·米）
电导率	γ	1/电阻率	S/m（西门子/米）
电感，自感	L	磁链/电流	H（亨）
磁导	$\Lambda(\rho)$	$\frac{磁通}{磁通势}=\frac{1}{磁阻}$	H（亨）
磁阻	R_m	$\frac{磁通势}{磁通}=\frac{1}{磁导}$	H^{-1}（1/亨）
能量密度(电)	w_e'	能量/体积	$J\cdot m^{-3}$（焦耳/米^3）
能量密度(磁)	w_m'	能量/体积	$J\cdot m^{-3}$（焦耳/米^3）
坡印亭向量	S	功率/面积	Wm^{-2}（瓦/米^2）
磁矢位	A	电流×磁导率	Wbm^{-1}（韦/米）

① 国标规定用 A，本书中为避免混淆采用 K。

附表 2-3　部分国际单位制词头

系　数	词　冠	英文词冠	代　号
10^{18}	艾[可萨]	exa	E
10^{15}	拍[它]	peta	P
10^{12}	太[拉]	tera	T
10^{9}	吉[咖]	giga	G
10^{6}	兆	mega	M
10^{3}	千	kilo	k
10^{2}	百	hecto	h
10^{1}	十	deca	da
10^{-1}	分	deci	d
10^{-2}	厘	centi	c
10^{-3}	毫	milli	m
10^{-6}	微	micro	μ
10^{-9}	纳[诺]	nano	n
10^{-12}	皮[可]	pico	p
10^{-15}	非[母托]	femto	f
10^{-18}	阿[托]	atto	a

附录三　部分材料的参数和物理常数

附录三包括四个表。

附表 3－1 中列出普通绝缘材料的相对介电常数 ε_r 和损失角正切 $\gamma/\omega\varepsilon$ 在正常室温和湿度以及很低音频下的代表性数值。

附表 3－2 中为一些金属导电材料和绝缘材料在频率为零和室温条件下的电导率 γ。

附表 3－3 列出了一些不同性质材料的相对磁导率 μ_r。

附表 3－4 列出五个物理常数的值。

附表 3－1　ε_r 和 $\gamma/\omega\varepsilon$

材　料	ε_r	$\gamma/\omega\varepsilon$	材　料	ε_r	$\gamma/\omega\varepsilon$
空　气	1.000 6		瓷	6	0.014
酒　精	25	0.1	比拉脑	4.4	0.000 5
氧化铝	8.8	0.000 6	硼硅酸玻璃	4	0.000 6
琥　珀	2.7	0.002	石英(熔化的)	3.8	0.000 75
酚醛塑料	4.74	0.022	橡　胶	2.5～3	0.002
钛酸钡	1 200	0.013	二氧化硅	3.8	0.000 75
二氧化碳	1.001		矽	11.8	
锗	16		雪	3.3	0.5
玻　璃	4～7	0.001	氯化钠(食盐)	5.9	0.000 1
冰	4.2	0.1	土壤(干燥)	2.8	0.07
云　母	5.4	0.000 6	冻　石	5.8	0.003
氯丁橡胶	6.6	0.011	特氟隆	2.1	0.000 3
尼　龙	3.5	0.02	二氧化钛	100	0.001 5
纸	3	0.008	水(未蒸馏的)	80	0.04
有机玻璃	3.45	0.04	海水		4
聚乙烯	2.26	0.000 2	木材(干燥的)	1.5～4	0.01
聚丙烯	2.25	0.000 3	苯乙烯泡沫	1.03	0.000 1
聚苯乙烯	2.55	0.000 05			

附表 3-2　γ

材　料	$\gamma/(S\cdot m^{-1})$	材　料	$\gamma/(S\cdot m^{-1})$
银	6.17×10^7	镍铬铁合金	0.1×10^7
铜	5.80×10^7	石　墨	7×10^7
金	4.10×10^7	矽	1 200
铝	3.82×10^7	铁氧体	100
钨	1.82×10^7	海　水	5
锌	1.67×10^7	石灰石	10^{-2}
黄　铜	1.5×10^7	粘　土	5×10^{-3}
镍	1.45×10^7	新鲜水	10^{-3}
铁	1.03×10^7	未曾蒸馏的水	10^{-4}
磷青铜	1×10^7	沙　土	10^{-5}
焊　料	0.7×10^7	花岗岩	10^{-6}
碳　钢	0.6×10^7	大理石	10^{-8}
德国银	0.3×10^7	胶　木	10^{-9}
锰	0.227×10^7	瓷	10^{-10}
康　铜	0.226×10^7	金钢石	2×10^{-3}
锗	0.22×10^7	聚苯乙烯	10^{-16}
不锈钢	0.11×10^7	石　英	10^{-17}

附表 3-3　μ_r

材　料	μ_r	材　料	μ_r
铋	0.999 998 6	铁　粉	100
石　蜡	0.999 999 42	机器钢	300
木　材	0.999 999 5	铁氧体	1 000
银	0.999 999 81	坡莫合金 45	2 500
铝	1.000 000 65	变压器钢	3 000
铍	1.000 000 79	矽　铁	3 500
氯化镍	1.000 04	纯　铁	4 000
硫酸锰	1.000 1	μ磁性合金	20 000
镍	50	铝硅铁粉	30 000
铸　铁	60	镍铁钼导磁合金	100 000
钴	60		

附表 3-4　物 理 常 数

物　理　量	数　　　值
电子的电荷	$e=(1.602\ 189\ 2\pm0.000\ 004\ 6)\times10^{-19}\mathrm{C}$（库）
电 子 质 量	$m_e=(9.109\ 534\pm0.000\ 047)\times10^{-31}\mathrm{kg}$（千克）
真空的介电常数	$\varepsilon_0=(8.854\ 187\ 818\pm0.000\ 000\ 071)\times10^{-12}\mathrm{F/m}$（法/米）
真空的磁导率	$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$（亨/米）
光速（真空中）	$c=(2.997\ 924\ 574\pm0.000\ 000\ 011)\times10^{8}\mathrm{m/s}$（米/秒）

部分习题答案

第一章

1-1-1 $\boldsymbol{E}=(22.6\boldsymbol{e}_x+33.9\boldsymbol{e}_z)$ V/m

1-1-2 （略）

1-1-3 $\boldsymbol{E}(0,0,2)=(0.156\boldsymbol{e}_x+1.88\boldsymbol{e}_z)$ V/m

1-1-4 （略）

1-2-1 $\sigma_P=\dfrac{\varepsilon_0-\varepsilon}{4\pi\varepsilon}\cdot\dfrac{q}{a^2}$

1-2-2 (1) $\dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0}$；(2) $\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln b/a$；(3) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

1-2-3 $a=0.736\text{cm}$，$U_{\max}=147\text{kV}$

1-3-1 （略）

1-3-2 （略）

1-3-3 $E_2=158$ V/m

1-4-1 $\varphi_1=\dfrac{a}{\varepsilon_0}\dfrac{R_2-R_1}{r}$，$r>R_2$

$\varphi_2=\dfrac{a}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{r}+\dfrac{a}{\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{R_1}{r}\right)$，　$R_1\leqslant r\leqslant R_2$

$\varphi_3=\dfrac{a}{\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$，　$r<R_1$

1-4-2 $\varphi=\dfrac{V_0}{d}x+\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(x^2-d^2)x$

1-4-3 （略）

1-5-1 $\varphi(x,y)=\dfrac{V_0}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi h}{a}}\sin\dfrac{\pi}{a}x\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{a}y$

1-5-2 $B_m=C_m\dfrac{a}{\pi m}\operatorname{sh}\dfrac{\pi mc}{a}$

1-5-3 $\varphi(\rho,\phi)=\displaystyle\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{\left[\left(\dfrac{\rho}{R_2}\right)^n-\left(\dfrac{R_2}{\rho}\right)^n\right]}{\left[\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^n-\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^n\right]}\frac{6V_0}{\pi n}\sin n\phi$

1-5-4 （略）

1-6-1 （略）

1-6-2 满足求解要求。

1-6-3 $\varphi_0=\dfrac{h_y^2(\varphi_1+\varphi_3)+h_x^2(\varphi_2+\varphi_4)}{2(h_x^2+h_y^2)}$

1-7-1 $\varphi=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln(\rho_2/\rho_1)$

1-7-2 $\tau'=-\dfrac{79}{81}\tau$，$\tau''=\dfrac{160}{81}\tau$

1-7-3 左方：$\varphi=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$，　r_1，r_2 为到 q_1 及其镜像的距离

右方：$\varphi=\dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$，　r_1，r_2 为到 q_2 及其镜像的距离

1-7-4 (1) 60 kV，$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{e}_{r1}+\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{e}_{r2}-\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}\boldsymbol{e}_r$

$\boldsymbol{E}_{\max}=2.46\times10^6\text{V/m}$

(2) 零，$\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\boldsymbol{e}_{r1}+\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\boldsymbol{e}_{r2}$

$\boldsymbol{E}_{\max}=3.7\times10^6\text{V/m}$

1-7-5 $0.177\,0\times10^{-6}\text{C/m}^2$，$0.088\,5\times10^{-6}\text{C/m}^2$

1-8-1 (3) 使 $\varphi_1=8\,992\text{V}$

1-8-2 (1) $C_{10}=C_{20}=C_{30}=0.017\text{pF}$，$C_{12}=C_{23}=C_{31}=0.010\text{pF}$，

(2) 0.047pF

1-8-3 $C_e=4.46\text{pF}$

1-9-1 减少，$\Delta W_e=\dfrac{1}{2}\dfrac{(C_1q_2-C_2q_1)^2}{C_1C_2(C_1+C_2)}$

1-9-2 (1) $\dfrac{\pi(\sigma_a a)^2}{\varepsilon}\ln(b/a)$　(2) $\dfrac{\pi\rho_a^2a^4}{4\varepsilon}\left[\dfrac{1}{4}+\ln(b/a)\right]$

(3) $\dfrac{\pi\rho_a^2a^4}{16\varepsilon}+\dfrac{\pi a^4}{4\varepsilon}(\rho_a-\rho_b)^2\ \ln(b/a)+\dfrac{\pi\rho_b^2}{16\varepsilon}(b^4-a^4)$

$+\dfrac{\pi\rho_b}{2\varepsilon}(\rho_a-\rho_b)a^2(b-a)$

1-9-3 (1) $2\times10^{-6}\text{J}$，(2) $0.4\times10^{-6}\text{J}$

1-9-4 $W_e=\dfrac{Q^2}{2}\dfrac{b-a}{4\pi\varepsilon_0 ab}$

1-9-5 $h=\dfrac{1}{2}\dfrac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U_0^2}{\rho_{\text{m}}gd^2}$

1-9-6 (略)

1-1 $\boldsymbol{E}=(47.3\boldsymbol{e}_x+16.10\boldsymbol{e}_y+0.322\boldsymbol{e}_z)\text{V/m}$

1-2 0.5

1-3 0.5cm，0.46cm

1-4 (1) $\boldsymbol{E}_1=\dfrac{\tau}{8\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{E}_2=\dfrac{\tau}{4\pi\varepsilon_0\rho}\boldsymbol{e}_\rho$

(2) $\boldsymbol{P}_1=\dfrac{3\tau}{8\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{P}_2=\dfrac{\tau}{4\pi\rho}\boldsymbol{e}_\rho$

(3) $\tau_p=-\dfrac{3\tau}{8\pi R_1}$　(在 $\rho=R_1$ 处)

$\tau_p = \dfrac{\tau}{8\pi R_2}$ （在 $\rho = R_2$ 处）

$\tau_p = -\dfrac{\tau}{4\pi R_3}$ （在 $\rho = R_3$ 处）

1－5 会被击穿

1－6 (1) $U_{AC} = U_{CD} = U_{DB} = \dfrac{1}{3}U_0$，$E_{AC} = E_{CD} = E_{DB} = U_0/d$

(2) $E_{AC} = E_{DB} = U_0/d$，$E_{CD} = 0$

(3) $U_{AC} = U_{DB} = U_0/2$，$E_{AC} = E_{DB} = \dfrac{3U_0}{2d}$，$E_{CD} = 0$

(4) $|E_{CD}| = 2|E_{AC}| = 2|E_{DB}|$，$E_{CD}$的方向与 E_{AC}和 E_{DB}的相反

1－7 $\boldsymbol{E} = (\rho_0 d/2\varepsilon_0)\boldsymbol{e}_x$

1－8 (1) $\boldsymbol{E} = -2A\boldsymbol{e}_x$ $\rho = -2A\varepsilon_0$

(2) $\boldsymbol{E} = -A(yz\boldsymbol{e}_x + xz\boldsymbol{e}_y + xy\boldsymbol{e}_z)$ $\rho = 0$

(3) $\boldsymbol{E} = -[(2A\rho\sin\phi + Bz)\boldsymbol{e}_\rho + A\rho\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\varphi + B\rho\,\boldsymbol{e}_z]$

$\rho = -\varepsilon_0\left(3A\sin\phi + \dfrac{Bz}{\rho}\right)$

(4) $\boldsymbol{E} = -A(2r\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_r + r\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\theta - r\sin\phi\,\boldsymbol{e}_\varphi)$

$\rho = -\varepsilon_0 A\left(6\sin\theta\cos\phi + \dfrac{\cos\phi}{\sin\theta}\cos 2\theta - \dfrac{\cos\phi}{\sin\theta}\right)$

1－9 $\varphi = 56.5\times10^3 x^2 + 117.5x$

1－10 $\varphi = V_0\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots\cdots}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\rho}{a}\right)^n \sin n\phi\right)$

1－11 (1) $x = \sqrt{\dfrac{q}{16\pi\varepsilon_0 E_0}}$ (2) $v_0 \geqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{q}{m}}\left[\dfrac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}\right]^{1/4}$

1－12 $\dfrac{2d^2R^3 - R^5}{d(d^2 - R^2)^2}\,q$

1－13 $\dfrac{abq^2}{4\pi\varepsilon_0(b^2 - a^2)}$

1－14 $\varphi(x,y) = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{(x-h)^2+y^2}}{\sqrt{(x+h)^2+y^2}}$，其中 $h = \dfrac{a^2-d^2}{2d}$

1－15 小球内：$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \dfrac{-\dfrac{a}{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{b-a}{ab}$

小球与大球内：$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right)$

1－16 (1) $\varphi = 228\ln\dfrac{(0.08+x)^2+y^2}{(0.08-x)^2+y^2}$

(2) $\sigma_{max} = 0.134\times10^{-6}\mathrm{C/m^2}$，$\sigma_{min} = 0.336\times10^{-9}\mathrm{C/m^2}$

1－17 (1) $U_2 = 32.8\mathrm{kV}$ $U_3 = 24.3\mathrm{kV}$

(2) $\tau_2 = -226.3\mathrm{nC/m}$ $U_3 = 15.93\mathrm{kV}$

1－18 （略）

1－19 两电轴位置分别为 $h_1 = \dfrac{a_2^2 - a_1^2 - d^2}{2d}$和$h_2 = \dfrac{a_2^2 - a_1^2 + d^2}{2d}$

1-20 $F=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4R^3h^3}{(h^4-R^4)^2}+\frac{1}{4h^2}\right]$

1-21 当 $q_2<\frac{2d^2R^3-R^5}{d(d^2-R^2)^2}\ q_1$ 时,有可能吸引。

第二章

2-1-1 0.2V/m

2-1-2 39.9A

2-1-3 $2P$

2-3-1 $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

2-3-2 $\rho=\boldsymbol{J}\cdot\nabla\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)$

2-3-3 $\varphi=\frac{\varphi_0}{a}y$

2-4-1 $P=\frac{C\gamma}{\varepsilon_0}U_0^2$

2-4-2 $R=\frac{1}{2\pi\gamma}\ln\frac{(b+h-a)}{(b-h+a)}$ ，其中 $b=\sqrt{h^2-a^2}$

2-5-1 证明略

2-5-2 15.92Ω

2-1 $\boldsymbol{J}=\gamma\left(\frac{\varphi_0}{r}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta$

2-2 $\boldsymbol{J}=\frac{3Q\omega r\sin\theta}{4\pi a^3}\boldsymbol{e}_\varphi$； $I=\frac{Q\omega}{2\pi}$

2-3 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-18A$； $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-2.4\pi Aa^5$

2-4 $\frac{2\pi\gamma U_0^2}{\ln b/a}$

2-5 $\boldsymbol{E}=\frac{U_0}{\rho\ln\frac{R_2}{R_1}}\boldsymbol{e}_\rho$，$\varphi=\frac{\ln\frac{R_2}{\rho}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}U_0$

2-6 $\boldsymbol{E}=\frac{R_1R_2}{(R_2-R_1)}\cdot\frac{U}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，$\varphi=\frac{R_1R_2(R_2-r)}{R_2(R_2-R_1)r}U$

2-7 (1) $\varphi_1=\frac{4\gamma_2U}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\phi+\frac{U(\gamma_1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2}$ ，$\varphi_2=\frac{4\gamma_1U}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\phi$

(2) $I=3.137\times10^5\mathrm{A}$ ，$R=9.58\times10^{-5}\Omega$

(3) $\boldsymbol{J}$ 不突变，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 有突变

(4) $\sigma=\frac{4\gamma_1U}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\ \frac{(\gamma_1-\gamma_2)}{r}$

2-8 (1) $\varphi=-74\ln\rho/45$

(2) $I=8.95\times10^6\mathrm{A}$ ，$R=3.35\times10^{-6}\Omega$

(3) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 不突变，$\boldsymbol{J}$ 有突变

(4) $\sigma=0$

2-9 $\varphi=\dfrac{\varphi_1\gamma_1(d-a)+\varphi_2\gamma_2 a}{\gamma_2 a+\gamma_1(d-a)}$ ，$\sigma=\dfrac{(\gamma_1\varepsilon_2-\gamma_2\varepsilon_1)}{\gamma_2 a+\gamma_1(d-a)}(\varphi_1-\varphi_2)$

2-10 (1) $\boldsymbol{E}_1=1.29\times10^2\times\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，$\varphi_1=1.29\times10^2\left(\dfrac{1}{r}-12.25\right)$

$\boldsymbol{E}_2=1.29\times10\times\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$，$\varphi_2=1.29\left(\dfrac{1}{r}-10\right)$

$\boldsymbol{J}=1.29\times10^{-8}\times\dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$

(2) $G=0.162\times10^{-9}\text{S}$

2-11 $2.72\times10^{12}\Omega\cdot\text{m}$

2-12 58.87Ω

2-13 918V

第三章

3-1-1 (a) $\boldsymbol{B}=\dfrac{2\mu_0 I(a^2+b^2)^{1/2}}{\pi ab}\boldsymbol{e}_z$；(b) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\boldsymbol{e}_z$；(c) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{e}_z$；

(d) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{\pi ab}\left[a^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2\right]^{1/2}\boldsymbol{e}_z$；(e) $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\right)\boldsymbol{e}_z$

3-1-2 $\boldsymbol{B}=3.0395\times10^{-7}\text{T}$

3-1-3 $F_2=-F_1=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$

3-2-1 $0\leqslant\rho\leqslant a$ 时，$\boldsymbol{B}_1=\dfrac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\boldsymbol{e}_\phi$；$a\leqslant\rho\leqslant b$ 时，$\boldsymbol{B}_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$；$\rho\geqslant b$ 时，$B_3=0$。

3-2-2 $0\leqslant\rho\leqslant a$ 时，$\boldsymbol{H}_1=\dfrac{J_0\rho^2}{3a}\boldsymbol{e}_\phi$；$\rho>a$ 时，$\boldsymbol{H}_2=\dfrac{J_0 a^2}{3\rho}\boldsymbol{e}_\phi$。

3-2-3 $4\times10^{-5}\boldsymbol{e}_x$

3-3-1 (1)、(2)、(4)可能为一磁场；(3)不可能为磁场。

3-3-2 $\boldsymbol{B}_2=1.23\text{T}$，$\theta_2\approx0$。

3-3-3 $\boldsymbol{H}_2=\left(\boldsymbol{e}_x+\dfrac{2\mu_1}{\mu_2}\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z\right)\text{A/m}$

3-4-1 $\boldsymbol{J}=-\dfrac{30x}{\mu}\boldsymbol{e}_x$

3-4-2 当 $\rho\leqslant\rho_0$ 时，$\boldsymbol{H}_1=\dfrac{I}{2\pi\rho_0}\rho\boldsymbol{e}_\phi$；当 $\rho>\rho_0$ 时，$\boldsymbol{H}_2=\dfrac{I}{2\pi\rho}\boldsymbol{e}_\phi$

3-4-3 当 $\rho\leqslant a$ 时，$\boldsymbol{A}_1=\dfrac{\mu_0 J_0}{9}(a^3-\rho^3+3\ln\dfrac{\rho_0}{a})\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{B}_1=\dfrac{\mu_0 J_0\rho^2}{3}\boldsymbol{e}_\phi$

当 $\rho>a$ 时，$\boldsymbol{A}_2=\dfrac{\mu_0 J_0 a^3}{3}\ln\dfrac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{B}_2=\dfrac{\mu_0 J_0 a^3}{3\rho}\boldsymbol{e}_\varphi$

3-5-1 $0\leqslant\rho\leqslant R_1$ 时，$\varphi_{m1}=0$；$\rho\geqslant R_2$ 时，$\varphi_{m2}=-\dfrac{I}{2\pi}\phi$

3-5-2 $\varphi_m=-1.91\arctan\dfrac{y}{2}$

3-6-1 $B=1.167\times10^{-5}\text{T}$

3-6-2 （略）

3-7-1 $\Phi_{abcd}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}$；$\Phi_{klmn}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}(1+2\ln 2)$

3-7-2 $L=0.061\ 5\text{H}$

3-7-3 (1) $M=0.916\text{mH}$；(2) $M=9.16\mu\text{H}$

3-8-1 $\rho\leqslant R_1$ 时，$W_{m1}=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$；$R_1\leqslant\rho\leqslant R_2$ 时，$W_{m2}=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

3-8-2 $W_m=0.030\ 8\text{J}$

3-8-3 $T=I_1 I_2\frac{\partial M}{\partial\alpha}$

3-9-1 0.54T

3-9-2 176At

3-1 $\boldsymbol{B}_P=\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\boldsymbol{e}_y$

3-2 $\boldsymbol{B}=\mu_0(44.1\boldsymbol{e}_x+32\boldsymbol{e}_z)$

3-3 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\mu_0 J_0 d\boldsymbol{e}_y$

3-4 应用叠加原理。通有均匀密度的无限长电流块产生的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{cases}-\frac{\mu_0 J_0 d}{2}\boldsymbol{e}_x & y>d/2\\ -\mu_0 J_0 y\boldsymbol{e}_x & |y|<d/2\\ \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\boldsymbol{e}_x & y<-d/2\end{cases}$$

通有电流密度$(-J_0\boldsymbol{e}_z)$的半径为 a 的圆柱所引起的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{cases}-\frac{\mu_0 J_0 a^2}{2(x^2+y^2)}(-y\boldsymbol{e}_x+x\boldsymbol{e}_y) & \rho>a\\ -\frac{\mu_0 J_0}{2}(-y\boldsymbol{e}_x+x\boldsymbol{e}_y) & \rho<a\end{cases}$$

合成磁感应强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$

3-5 $2aK_0$

3-6 (1) $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{M}_3=0$

$\boldsymbol{H}_2=80\boldsymbol{e}_y\text{A/m}$，$\boldsymbol{B}_2=100.3\times10^{-6}\boldsymbol{e}_y\text{T}$

$\boldsymbol{M}_2=-0.16\boldsymbol{e}_y\ \text{A/m}$

(2) $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{M}_3=0$

$\boldsymbol{H}_2=80\boldsymbol{e}_y\ \text{A/m}$，$\boldsymbol{B}_2=0.100\ 5\boldsymbol{e}_y\text{T}$

$\boldsymbol{M}_2=7.99\times10^4\boldsymbol{e}_y\ \text{A/m}$

3-7 用面电流替代磁化强度，在 $\rho=a$ 处 $K=M_0$

$$(1)\ B_z=\frac{\mu_0 M_0}{2}\left\{\frac{\frac{l}{2}-z}{\left[\left(z-\frac{l}{2}\right)^2+a^2\right]^{1/2}}+\frac{\frac{l}{2}+z}{\left[\left(z+\frac{l}{2}\right)^2+a^2\right]^{1/2}}\right\}$$

$$H_z=\begin{cases}\dfrac{B_z}{\mu_0}-M_0 & |z|<l/2\\ \dfrac{B_z}{\mu_0} & |z|>l/2\end{cases}$$

(2) $z\gg l/2$，$B_z=\dfrac{\mu_0 M_0 a^2 l}{2z^3}$

沿 z 轴 $B_z=\dfrac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$，其中 $m=M_0\pi a^2 l$

3-8　环内 $\boldsymbol{H}=144.69\boldsymbol{e}_\varphi$ A/m，$\boldsymbol{B}=9.1\times10^{-2}\boldsymbol{e}_\varphi$ T；环外 $H=0$、$B=0$

3-9　$B=\dfrac{\sqrt{19}}{8}$T，$\theta=\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{4}$、$\phi=45°$

3-10　(1) $B_x=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 J_0}{2a}(y^2-a^2) & |y|<a\\ 0 & |y|>a\end{cases}$

(2) $B_a=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 J_0\rho^2}{3a} & \rho<a\\ \dfrac{\mu_0 J_0 a^2}{3\rho} & \rho>a\end{cases}$

3-11　(1) $A_z=\begin{cases}0 & 0<\rho<a\\ \mu_0 K_0 a\ln\dfrac{a}{\rho} & \rho>a\end{cases}$　　$\boldsymbol{B}=\begin{cases}0 & 0<\rho<a\\ \dfrac{\mu_0 K_0 a}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi & \rho<a\end{cases}$

(2) $A_z=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 J_0 d}{2}x+\dfrac{\mu_0 J_0 d^2}{8} & x<-\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{-\mu_0 J_0 x^2}{2} & -\dfrac{d}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{-\mu_0 J_0 d}{2}x+\dfrac{\mu_0 J_0 d^2}{8} & x>\dfrac{d}{2}\end{cases}$

$\boldsymbol{B}_z=\begin{cases}-\dfrac{\mu_0 J_0 d}{2}\boldsymbol{e}_y & x<-\dfrac{d}{2}\\ \mu_0 J_0 x\boldsymbol{e}_y & -\dfrac{d}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{d}{2}\\ \dfrac{\mu_0 J_0 d}{2}\boldsymbol{e}_y & x>\dfrac{d}{2}\end{cases}$

3-12　(略)

3-13　在 μ_2 中 $H_2=\dfrac{9I}{10\pi\rho}$；$F=\dfrac{1.8\mu_0 I^2}{\pi a}$，大。

3-14　$W_m=\dfrac{I^2 l}{4\pi}\left\{\dfrac{\mu_1}{(R_2^2-R_1^2)^2}\left[\dfrac{R_2^4-R_1^4}{4}+R_1^4\ln\dfrac{R_2}{R_1}-R_1^2(R_2^2-R_1^2)\right]+\mu_0\ln\dfrac{R_3}{R_2}+\dfrac{\mu_2}{(R_4^2-R_3^2)^2}\left[\dfrac{R_4^4-R_3^4}{4}+R_4^4\ln\dfrac{R_4}{R_3}-R_4^2(R_4^2-R_3^2)\right]\right\}$

$L=\dfrac{2W_m}{I^2}$

3-15　$M=\dfrac{\mu_0 C}{2\pi}\ln\dfrac{(R+a+b)(D-R-a)}{(R+a)(D-R-a-b)}$

$$F=\frac{\mu_0 C I_1 I_2 D}{2\pi}\frac{(b-a)(a+b-D)}{ab(D-a)(D-b)}$$

3-16 $I'=I$，$M=\frac{\mu_0 C}{2\pi}\ln\frac{(a+b)(a+b-2d)}{a(a+2d)}$

3-17 $L=\frac{\mu_0 N^2 dD}{2\delta}$，$F=\frac{-\mu_0 N^2 dDI^2}{4\delta^2}$

3-18 （略）

第四章

4-1-1 $-\frac{\mu_0 I_m b}{2\pi}\left[\omega\cos\omega t\ln\left(\frac{c+vt+a}{c+vt}\right)-\frac{av}{(c+vt+a)(c+vt)}\sin\omega t\right]$

4-1-2 （1）6.55×10^{15}；（2）2.83×10^{2}；（3）4.47×10^{-9}

4-2-1 （略）

4-2-2 $74.54\sin(1\,000t+30^\circ)$V/m，方向与分界面法线成 71.57°

4-2-3 导体表面上的电流分布 $\boldsymbol{K}(x,y,0,t)=H_0\sin\beta x\cos(\omega t-\beta y)\boldsymbol{e}_y$，分界面处的电场强度切线分量为零。

4-3-1 $\boldsymbol{B}=-A_m\beta\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_y$；$\boldsymbol{E}=-A_m\cos(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z$

4-3-2 （略）

4-4-1 $\boldsymbol{S}=2\,650\cos^2(\omega t-\beta z)\boldsymbol{e}_z\text{W/m}^2$

4-4-2 （略）

4-5-1 （1）$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{e}_x\frac{E_m}{\sqrt{2}}\cos 2x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}$

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{e}_y\frac{H_m}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{e}_x\frac{E_m}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\boldsymbol{e}_y\frac{E_m}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi x}{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta z+90^\circ)}$$

（2）$\boldsymbol{E}(y,z,t)=\boldsymbol{e}_x\sqrt{2}E\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin\frac{\pi y}{a}\cos(\omega t-\beta z)$

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\boldsymbol{e}_y\sqrt{2}H\cos\beta z\cos(\omega t+90^\circ)$$

4-5-2 （1）$\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{e}_x\frac{E_m}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\beta z+\varphi_x)}$

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{e}_y\frac{H_m}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\beta z+\varphi_y)}$$

（2）$\boldsymbol{S}_{av}=Re[\dot{\boldsymbol{E}}\times\dot{\boldsymbol{H}}^*]=\boldsymbol{e}_z\frac{E_m H_m}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\cos(\varphi_x-\varphi_y)$

4-5-3 $\dot{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\dot{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial y}-\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\dot{\Psi}}{\partial x}$

$$\dot{\boldsymbol{E}}=-\boldsymbol{e}_z\mathrm{j}\omega\dot{\Psi}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon}\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial^2\dot{\Psi}}{\partial z\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial^2\dot{\Psi}}{\partial z\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial^2\dot{\Psi}}{\partial z^2}\right)$$

4-6-1 （1）$E_m=5\times10^{-6}$V/m，$H_m=1.885\times10^{-3}$A/m

（2）$S_{max}=9.4\times10^{-9}\text{W/m}^2$

（3）$P=0.079$W

(4) $R_e = 0.079\Omega$

4-6-2 (略)

4-1 (1) $\frac{\mu_0 I_m b\omega}{2\pi}\ln\left(\frac{c+a}{a}\right)\sin\omega t$

(2) $\frac{\mu_0 I_m \upsilon_0 b}{2\pi}\left(\frac{1}{c+\upsilon t}-\frac{1}{c+\upsilon t+a}\right)$

(3) $\frac{\mu_0 I_m b}{2\pi}\left[\left(\frac{\upsilon}{c+\upsilon t}-\frac{\upsilon}{c+\upsilon t+a}\right)\cos\omega t+\omega\sin\omega t\ln\frac{c+a+\upsilon t}{c+\upsilon t}\right]$

4-2 $(1.15\times10^{-6}\cos 10^9 t)\text{A/m}^2$

4-3 $\frac{\varepsilon\omega U_m}{d}\cos\omega t$ $\frac{\mu_0 U_m \rho}{2d}(\gamma\sin\omega t+\varepsilon\omega\cos\omega t)$

4-4 (略)

4-5 $-\frac{U_0^2\gamma\rho}{2d^2}\boldsymbol{e}_\rho$

4-6 (1) $1\,325[1+\cos(4\pi ft-0.84z)]\boldsymbol{e}_x\text{W/m}^2$

(2) $1\,325\boldsymbol{e}_x\text{W/m}^2$ (3) $-270.2\sin(4\pi ft-0.42)\text{W}$

4-7 $\boldsymbol{H}=[2.3\times10^{-4}\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t-54.4z)\boldsymbol{e}_x-1.33\times10^{-4}\cos(10\pi x)$
$\sin(6\pi\times10^9 t-54.4z)\boldsymbol{e}_x]\text{A/m}$

$\beta=10\sqrt{3}\pi\ \text{rad/m}$

4-8 (1) 有波动性 (2) 0.5 rad/m

(3) $\left[\frac{0.398}{r}\cos(10^8 t-0.5z)\boldsymbol{e}_\varphi\right]\text{A/m}$

(4) $[397.9\cos(10^8 t-0.5z)]\boldsymbol{e}_z\text{A/m}$

(5) $[-1.24\sin(10^8 t-0.25)]\text{A}$

4-9 $\boldsymbol{E}=-\frac{1}{2}\rho^2 a\cos at\boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{B}=-\rho\sin at\boldsymbol{e}_\phi$

4-10 30m 处：$H_\alpha=[(-20.05\cos\omega t-6.38\sin\omega t)\times10^{-3}]\text{A/m}$

$E_r=(-4.04\sin\omega t-1.29\cos\omega t)\text{V/m}$

$E_\theta=(-7.56\cos\omega t-2.405\sin\omega t)\text{V/m}$

5km 处：$H_\alpha=\left[1.202\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\times10^{-4}\right]\text{A/m}$

$E_\theta=\left[4.52\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\times10^{-2}\right]\text{V/m}$

4-11 $R=0.877\Omega$ $P=1.074\text{ kW}$

4-12 $P=\frac{E_0^2}{90}$

4-13 $\omega=\frac{1}{\pi}\times10^7\text{rad/s}$ $\varepsilon_r=16\pi^2\times10^2$

4-14 (1) $\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{0.23}{\sqrt{2}}e^{-j\beta z}\boldsymbol{e}_x-\frac{0.04}{\sqrt{2}}e^{-j(\beta z-\frac{\pi}{6})}\boldsymbol{e}_x$

(2) $\dot{\boldsymbol{H}}=\frac{0.03}{\sqrt{2}z_0}e^{-j\beta z}\boldsymbol{e}_y-\frac{0.04}{\sqrt{2}z_0}e^{-j(\beta z-\frac{\pi}{6})}\boldsymbol{e}_y$

$$H(z,t)=\frac{0.03}{z_0}\cos(10^8\pi t-\beta z)e_y-\frac{0.04}{z_0}\left(10^8\pi t-\beta z+\frac{\pi}{6}\right)e_y$$

第五章

5-1-1 $J_d=\frac{\omega\varepsilon}{d}U_m\cos\omega t$　　$B=\frac{\mu_0\dot{U}_m}{2d}\rho(\omega\varepsilon\cos\omega t+\gamma\sin\omega t)$

5-1-2 $f_{max}=90\text{kHz}$

5-2-1 （略）

5-2-2 I^2R；I^2X_C

5-3-1 （略）

5-3-2 $\tau_e=1.328\times10^{-3}\text{s}$

$E_1=[0.25\times10^5(1-e^{-t/\tau_e})+0.667\times10^5e^{-t/\tau_e}]\text{V/m}$

$E_2=[0.75\times10^5(1-e^{-t/\tau_e})+0.333\times10^5e^{-t/\tau_e}]\text{V/m}$

$\sigma_S=-1.99\times10^{-6}(1-e^{-t/\tau_e})\text{C/m}^2$

5-3-3 $\frac{\dot{E}_1}{\dot{E}_2}=2.03\times e^{-j37.5°}$

5-3-4 (1) $E_1=\frac{U\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_1\ln\frac{R_3}{R_2}}\cdot\frac{1}{\rho}$，$E_2=\frac{U\varepsilon_1}{\varepsilon_2\ln\frac{R_2}{R_1}+\varepsilon_1\ln\frac{R_3}{R_2}}\cdot\frac{1}{\rho}$

(2) $E_1=\frac{U\gamma_2}{\gamma_2\ln\frac{R_2}{R_1}+\gamma_1\ln\frac{R_3}{R_2}}\cdot\frac{1}{\rho}$，$E_2=\frac{U\gamma_1}{\gamma_2\ln\frac{R_2}{R_1}+\gamma_1\ln\frac{R_3}{R_2}}\cdot\frac{1}{\rho}$

5-4-1 铜：$d=9.35\text{mm}$，铁：$d=0.23\text{mm}$

5-5-1

f/Hz	50	2 000	5 000
B/B_i	1.004	4.55	16.6

5-5-2 （略）

5-6-1 内导体：$1.046\times10^{-2}\Omega/\text{m}$；外导体：$2.784\times10^{-3}\Omega/\text{m}$

5-6-2 $f=50\text{Hz}$ 时，$R=0.29\times10^{-4}\Omega/\text{m}$；

$f=5\ 000\text{kHz}$ 时，$R=0.93\times10^{-2}\Omega/\text{m}$

5-6-3 （略）

5-7-1 (1) $\tau_m=1.458\times10^{-3}\text{s}$；(2) $\frac{H_i}{H_o}=0.632$；(3) $\frac{\dot{H}}{\dot{H}_o}=0.213e^{-j77.7°}$

5-7-2 (1) 0.76mm；(2) 1.414mm；(3) 原理上中周可用铁，电源变压器不能用铝。

5-7-3 (1) $\dot{J}_z=-99350e^{-j9.4°}\dot{I}\text{ch}[993.5e^{j45°}(0.002-x)]$，$\left(\frac{d}{2}<x<\frac{d}{2}+a\right)$

(2) $R=0.02038\Omega$

5-1 $q(t)=q_0e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$　　$J=\frac{q_0\gamma}{4\pi\varepsilon r^2}e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}t}$，$H_0=0$

5-2　$\boldsymbol{B}_t = B_0 \sin \omega t \boldsymbol{e}_z = \mu_0 I_0 \frac{n}{d} \sin \omega t \boldsymbol{e}_z$

$E_\phi = -\frac{\omega B_0 \rho}{2} \cos \omega t \qquad \rho < a$

$E_\phi = -\frac{\omega B_0 a^2}{2\rho} \cos \omega t \qquad \rho > a$

5-3　(1) $E_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} U$，$E_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} U$

(2) $\dot{E}_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \dot{U}$，$\dot{E}_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \dot{U}$

(3) $\dot{E}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \dot{U}$，$\dot{E}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} \dot{U}$

(4) $\dot{E}_1 = \frac{\gamma_2}{j\omega\varepsilon_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \dot{U}$，$\dot{E}_2 = \frac{j\omega\varepsilon_1}{j\omega\varepsilon_1 d_2 + \gamma_2 d_1} \dot{U}$

5-4　$\dot{J}_z = 2.24 e^{-j132^\circ} \text{ch}[1\,876(1+j)x]\ \text{A/m}^2$

5-5　1.867m

5-6　$(0.188 + j56.8)\Omega$

5-7　（略）

5-8　（略）

5-9　铝板厚度 8.46×10^{-2}m；铁板厚度 3.9×10^{-3}m

5-10　(1) $\dot{J}_z = 1\,169 e^{j46.8^\circ} \text{ch}[107(1+j)y]\ \text{kA/m}^2$

(2) $P = 3.385$W

(3) 1.67 倍

第六章

6-1-1　（略）

6-2-1　（略）

6-2-2　$\boldsymbol{H} = [-0.265 \sin(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_y + 0.531 \cos(\omega t - \beta x)\boldsymbol{e}_z]\ \text{A/m}$

$\boldsymbol{S} = [26.525 + 79.576 \cos^2(\omega t - \beta x)]\boldsymbol{e}_x \quad \text{W/m}^2$

6-2-3　$f = 3 \times 10^8$Hz　$v = 3 \times 10^8$m/s　$\lambda = 1$m

$\beta = 2\pi$rad/m　传播方向为$(-z)$方向

$\boldsymbol{H} = 0.1 \cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi z)\boldsymbol{e}_x$

6-2-4　0.027×10^{-3}A/m　$\frac{1}{3} \times 10^6$s

6-3-1　(1) 2.24m　1.118×10^6m/s

(2) $\boldsymbol{E} = [-1.226 \times 10^{-7} \cos(\omega t - 151^\circ)\boldsymbol{e}_z]\ \text{V/m}$

$\boldsymbol{H} = [1.234 \times 10^{-7} \cos(\omega t - 196^\circ)\boldsymbol{e}_y]\ \text{A/m}$

(3) $1.47 \times 10^{-12}\text{W/m}^3$

6-3-2　(1) 铜：$Z_0 = 1.85 \times 10^{-6}(1+j)\Omega$

$\alpha = 107$Np/m　$d = 9.3 \times 10^{-3}$m

银：$Z_0 = 1.79\times10^{-6}\ (1+\mathrm{j})\Omega$

$\alpha = 110.18\mathrm{Np/m}$ $\quad d = 9.08\times10^{-3}\mathrm{m}$

(2) 铜：$Z_0 = 8.25\times10^{-3}\ (1+\mathrm{j})\Omega$

$\alpha = 4.79\times10^5\mathrm{Np/m}$ $\quad d = 2.09\times10^{-6}\mathrm{m}$

银：$Z_0 = 8.01\times10^{-3}\ (1+\mathrm{j})\Omega$

$\alpha = 4.93\times10^5\mathrm{Np/m}$ $\quad d = 2.03\times10^{-6}\mathrm{m}$

6-3-3 $10^9\mathrm{Hz}$ $\quad 1.11\times10^5\mathrm{S/m}$

6-4-1 （略）

6-4-2 左旋椭圆极化波

6-5-1 (1) $\Gamma\approx-1$ $\quad T=0$

(2) $\Gamma\approx-1$ $\quad T=0$

(3) $\Gamma\approx0.9947\angle179.7°$ $\quad T=7.43\times10^{-3}\angle44.85°$

6-5-2 (1) $\boldsymbol{E}^-(x,t)=[-2.25\sqrt{2}\cos(18\times10^8t+6x)]\boldsymbol{e}_y$ V/m

$\boldsymbol{E}'(x,t)=[7.75\sqrt{2}\cos(18\times10^8t-9.49x)]\boldsymbol{e}_y$ V/m

(2) 空气中 $\quad S_{av}=0.252\mathrm{W/m^2}$

介质中 $\quad S_{av}=0.252\mathrm{W/m^2}$

6-5-3 （略）

6-6-1 $\boldsymbol{E}=[377\sqrt{2}\cos(\omega t-0.2\pi x)\boldsymbol{e}_y]$V/m $\quad |\boldsymbol{H}|=2$A/m

$$x=-\frac{n\lambda}{2}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

6-6-2 (1) $Z_{01}=\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ $\quad Z_{02}=\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$

$k_1=\mathrm{j}\beta_1=\mathrm{j}2\pi\times10^9\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$ $\quad k_2=\mathrm{j}\beta_2=\mathrm{j}2\pi\times10^9\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$

(2) $\boldsymbol{E}_1(x,t)=[100(1+\Gamma)\cos(2\pi\times10^9t-\beta_1x)$
$+2\Gamma\times100\sin\beta_1x\sin\omega t]\boldsymbol{e}_y$ V/m

$$\boldsymbol{H}_1(x,t)=\left[\frac{100}{Z_{01}}(1-\Gamma)\cos(2\pi\times10^9t-\beta_1x)+\frac{200\Gamma}{Z_{01}}\cos\beta_1x\cos\omega t\right]\boldsymbol{e}_z\ \mathrm{A/m}$$

$\boldsymbol{E}_2(x,t)=[100T\cos(2\pi\times10^9t-\beta_2x)\boldsymbol{e}_y]$V/m

$$\boldsymbol{H}_2(x,t)=\left[\frac{100T}{Z_{02}}\cos(2\pi\times10^9t-\beta_2x)\boldsymbol{e}_z\right]\mathrm{A/m}$$

6-6-3 （略）

6-6-4 （略）

6-1 (1) $4.92\times10^8\mathrm{Hz}$ $\quad$ (2) 10.30 rad/m $\quad$ (3) 2.12 A/m z 方向

6-2 (1) $f=3\times10^9\mathrm{Hz}$ $\quad \boldsymbol{E}=[\sqrt{2}\cos(6\pi\times10^9t-20\pi x)\boldsymbol{e}_y]$ V/m

$$\boldsymbol{H}=\frac{\sqrt{2}}{120\pi}\cos(6\pi\times10^9t-20\pi x)\boldsymbol{e}_z\mathrm{A/m}$$

(2) E_{max}的时间，$t=\dfrac{2n-1}{12\times10^9}$ s $\quad (n=1,2,\cdots)$

$E=0$ 的时间，$t=\frac{n}{6\times10^{9}}$ s $(n=1,2,\cdots)$

(3) $\frac{1}{3}\times10^{-6}$ s

6-3 $\mu_r=1.989$ $\varepsilon_r=1.131$ $f=2.5\text{GHz}$

6-4 $E_{max}=1\,005.16\text{V/m}$ $B_{max}=335.05\times10^{-8}\text{T}$

6-5 (1) 3.483m (2) 238.4Ω 0.063 2m 1.897×10^{8}m/s

(3) $\boldsymbol{H}=0.209\,7e^{-0.199x}\cos\left(6\pi\times10^{9}t-99.36x-\frac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{e}_z$ A/m

6-6 1.111×10^{5}S/m 10^{9}Hz

6-7 (1) $p(t)=2\gamma E_0^2e^{-2\alpha x}\cos^2(\omega t-\beta x)$ $P=\gamma E_0^2e^{-2\alpha x}$

(2) $\frac{\gamma}{2\alpha}E_0^2$ (3) $-\oint_A\boldsymbol{S}_{av}\cdot d\boldsymbol{A}=\frac{E_0^2}{|Z_0|}\cos\varphi_z$

6-8 $a_1=\pm3$ $a_2=\mp4$

6-9 $E_{1m}^{-}=33.3$ V/m $E_{2m}^{+}=66.7$ V/m

6-10 (1) 0.678m (2) 93.1%

6-11 (1) 能，入射角 $\theta_1=32°$ (2) 能，$\theta_1\geqslant38.68°$

(3) 能，$\theta_1=57.99°$；不能，因波只能从光密媒质到光疏媒质才可全反射。

6-12 (1) 能，$\theta_1\geqslant38.68°$ (2) 不可能 (3) 都不能发生

6-13 (1) $\theta_c=6.38°$ (2) $\Gamma_\perp=1$ 全反射 (3) $T_\perp=2$

6-14 (1) $Z_{01}=377\Omega$ $Z_{02}=260.15\,\Omega$

$k_1=\text{j}2.09$ rad/m $k_2=\text{j}3.03$ rad/m

(2) $E_m^-=18\text{V/m}$ $H_m^-=0.048\text{A/m}$

$E'_m=82\text{V/m}$ $H'_m=0.32\text{A/m}$

(3)（略）

6-15 (1) $E_{max}=572.663$ V/m $E_{min}=181.337$ V/m

(2) S=3.158 (3) 275.44 W/m²

6-16 (1) 0.323×10^{13}m (2) 11.594Ω (3) 3Ω (4) 13.04W

6-17 （略）

6-18 铝板厚度 8.46×10^{-2}m；铁板厚度 3.9×10^{-3}m

6-19 (1) $v=2.32\times10^{7}$m/s $\lambda=7.73\times10^{-2}$m

(2) $4.2\times10^{-5}e^{-j35.7°}$A/m (3) $S=1.7\times10^{-8}\text{W/m}^2$

(4) $E=2.9\times10^{-6}$V/m $H=1.2\times10^{-7}$A/m

(5) 7.88×10^{-2}m

6-20 (1) 2.5×10^{6}Hz

(2) 介质中：$\boldsymbol{E}=400\pi\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{20}x\right)\boldsymbol{e}_y$ V/m

$\boldsymbol{H}=10\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{20}x\right)\boldsymbol{e}_z$A/m

空气中：$\boldsymbol{E}=800\pi\sqrt{2}\left[\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{60}x\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{60}x\right)\right]\boldsymbol{e}_y$V/m

$$H=\frac{20\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{60}x\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{60}x\right)\right]e_z\text{A/m}$$

(3) $S=8\ 000\pi\cos^2\left(\omega t-\frac{\pi}{20}x\right)e_x\ \text{W/m}^2$　　$S_{av}=4\ 000\pi e_x\text{W/m}^2$

(4) $w_e=\frac{4\pi}{9}\times10^{-5}\cos^2\left(\omega t-\frac{\pi}{20}x\right)\text{J/m}^3$　　$w_{emax}=\frac{4\pi}{9}\times10^{-5}\text{J/m}^3$

$w_m=\frac{4\pi}{9}\times10^{-5}\cos^2\left(\omega t-\frac{\pi}{20}x\right)\text{J/m}^3$　　$w_{mmax}=\frac{4\pi}{9}\times10^{-5}\text{J/m}^3$

6-21　(1) $\theta_c=\frac{\pi}{4}$　(2) $\theta_2=\frac{\pi}{2}$　(3) $|\Gamma_{/\!/}|=1$

(4) $|\Gamma_{/\!/}|=\sqrt{2}$　(5) 不满足无反射条件，$\theta_B=35.26°$

(6) $v=2.12\times10^8\text{m/s}$　(7) $v_x=2.45\times10^8\text{m/s}$

(8) $v_z=4.24\times10^8\text{m/s}$　(9) 波发生全反射

(10) $S_{av}=0$

第七章

7-1-1　(略)

7-1-2　(略)

7-2-1　(1) d 变为$\sqrt{2}$倍　(2) W 变化$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍　(3) W 变化 2 倍

(4)(1)(2)情况下 v 变化$\frac{1}{\sqrt{2}}$倍，(3)情况下 v 不变。

7-2-2　(1) 26.11mm　(2) 3.91mm

7-2-3　83.33Ω

7-3-1　(1) $R_L^2-250R_L+X_L^2+75^2=0$

(2) $X_L=\pm96.8\Omega$

(3) 若 $X_L=96.8\Omega$，$Z_{min}=0.29\lambda$

若 $X_L=-96.8\Omega$，$Z_{min}=0.21\lambda$

7-3-2　(1) $\dot{\Gamma}=0.27+j0.20$　(2) $Z_L=(465+j210)\Omega$

7-3-3　(1) $\dot{\Gamma}_L=0.31\angle-47.49$　(2) (略)

(3) $|Z_{min}|=0.184\ \lambda$　$|Z_{max}|=0.434\ \lambda$

7-4-1　$Z_{in}=26.3-j9.87$

7-4-2　(1) $(372.68\angle-26.57°)$V　(2) $P=277.68$W

(3) $(263.523\angle-63.44°)$V

7-5-1　$l'=0.105\lambda$　$Z_{02}=38.75\Omega$

7-5-2　$l_1\approx0.324\lambda$　$l_2=\frac{\lambda}{8}$

7-6-1　(1) $Z_0=(289.8-j77.6)\Omega$　$\alpha=0.139\text{Np/m}$

$\beta=0.235\text{rad/m}$

(2) $R_0=58.5\Omega/\text{M}$　$\omega L_0=57.305\Omega/\text{m}$

$G_0=0.245\times10^{-3}\text{S/m}$　$\omega C_0=8.76\times10^{-4}\Omega/\text{m}$

7－6－2 （略）

7－1 （略）

7－2 （1）$L_0=1.11\times10^{-6}\text{H/m}$ $C_0=10.27\text{pF/m}$

（2）$Z_0=324.67\Omega$ $\beta=12.57\text{rad/m}$

7－3 49.98Ω 33.32Ω

7－4 （1）$0.33e^{j(2\beta z-46.65)}$ （2）（略）

（3）$L_{\min}=0.185\lambda$ $L_{\max}=0.435\lambda$

7－5 （1）$R_i=\dfrac{Z_0^2}{R_L}$ $X_i=\dfrac{Z_0^2}{X_L}$

（2）$\sqrt{\left|\dfrac{Z_i}{Z_L}\right|}$

7－6 （1）$Z_0=50\Omega$ （2）$\Gamma=+\dfrac{j}{3}$ （3）$Z_{\min}=\dfrac{3\lambda}{8}$

7－7 （2）Z_0S （3）Z_0/S

7－8 $Z_0=399.1\Omega$ $\alpha=0.013\,2\text{Np/m}$ $\beta=20.94\text{rad/m}$

$\lambda=0.3\text{m}$ $v=3\times10^8\text{m/s}$

7－9 （a）$-j0.5Z_0$ （b）∞ （c）Z_0 （d）$2Z_0$

7－10 短路时：0.074λ；开路时：0.324λ

7－11 （1）$U(z,t)=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}e^{-0.01z}\cos(8\,000\pi t-5.58z-18.435)\text{V}$

$I(z,t)=\dfrac{1}{3\sqrt{10}}e^{-0.01z}\cos(8\,000\pi t-5.58z-18.435)A$

（2）$U(50\,000,t)=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}e^{-500}\cos(8\,000\pi t-128.16)\text{V}$

$I(50\,000,t)=\dfrac{\sqrt{10}}{30}e^{-500}\cos(8\,000\pi t-128.16)\text{A}$

（3）$P=\dfrac{5}{18}e^{-1\,000}\text{W}$

7－12 （1）$\Gamma=0.27+j0.20$ （2）$Z_L=(465+j210)\Omega$

（3）$R=150\Omega$ $l=0.2\lambda$

7－13 （1）$Z_L=(33.7-j24.0)\Omega$ （2）$\Gamma=\dfrac{1}{3}e^{-j0.6\pi}$ （3）25cm 处

7－14 （略）

7－15 （1）短路或纯电阻 （2）开路或 $R>Z_0$ 的纯电阻

（3）容抗 （4）感抗

7－16 （1）$l=0.5\text{m}$ （2）$\Gamma=-0.961$

（3）$S=50$，$z=0$ 处 （4）$Z_{in}=2\,500\ \Omega$

7－17 $B=0.04\text{S}$ $R_0=25\Omega$

7－18 $Z_L=42.38\angle30.62^\circ\Omega$

7－19 （1）$P_L=0.833\times10^{-9}\text{W}$

（2）因为（1）中已是最大功率传输，所以所提要求是不可能的。

7-20 $d_2=0.75\lambda$ $Z_2=245\Omega$

第八章

8-1-1 （1）$E_x=0$，$E_y=\frac{j\omega\mu}{k_c}(-A\sin k_c x+B\cos k_c x)$

$H_x=-\frac{\gamma}{k_c}(-A\sin k_c x+B\cos k_c x)$

$H_y=0$

（2）$B=0$，A 由波源决定；$k_c=\frac{n\pi}{a}$ $(n=1,2,\cdots)$

（3）TE 波，$\lambda_c=\frac{2a}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$

8-2-1 TE_{10}、TE_{01}、TE_{11} 和 TM_{11} 模的截止波长 λ_c 分别是 12cm、8cm、6.66cm 和 6.66cm。

当信号源频率是 3GHz 时，仅有 TE_{10} 模是传输模，其余都是截止模。TE_{10} 模的 $\lambda_g=18.09\text{cm}$、$\beta=34.73\text{rad/m}$、$v_p=5.43\times10^8\text{m/s}$

8-2-2 $\lambda_c=4.24\text{cm}$ $a=9\text{cm}$，$b=6\text{cm}$

8-3-1 （略）

8-4-1 $6.06\times10^9\text{Hz}$

8-4-2 谐振波长 $\lambda_0=10\text{cm}$ 的空腔的尺寸大。

8-1 $\boldsymbol{K}=-\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2}\frac{\pi}{b}E_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{-j\beta z}\boldsymbol{e}_z$ $(y=0,\ b)$

$\boldsymbol{K}=-\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2}\frac{\pi}{a}E_0\sin\frac{\pi y}{b}e^{-j\beta z}\boldsymbol{e}_z$ $(x=0,\ a)$

8-2 $f_c=16.36\text{GHz}$ $\beta=240\text{rad/m}$ $\lambda_g=2.62\text{m}$

$v_p=5.24\times10^8\text{m/s}$ $\alpha=272\text{Np/m}$

8-3 TE_{10}，TE_{01}，TE_{20}，$TE_{11}(TM_{11})$，TM_{21}，TM_{12} 的 f_c 依次是 6.25GHz，15GHz，13GHz，16.36GHz，19.8GHz，30.7GHz

8-4 （1）$\lambda=16\text{cm}$ 时，没有传播模；$\lambda=8\text{cm}$ 时，TE_{10} 为传播模；$\lambda=6.5\text{cm}$ 时，TE_{10}，TE_{20}，TE_{01} 均为传播模。

（2）2.187GHz～3.958GHz

8-5 $\lambda_g=4.24\text{cm}$，$\lambda_c=4.24\text{cm}$，$v_p=4.24\times10^8\text{m/s}$

$v_g=2.12\times10^8\text{m/s}$

8-6 （1）TE_{01}，TE_{10}，TE_{20}

（2）$3.98\times10^8\text{m/s}$，$2.26\times10^8\text{m/s}$，

39.76mm，45.72mm

8-7 7.07cm

8-8 $2.12\times10^9\text{Hz}$

8-9 $a\times b\times l=6.325\times3.163\times8.165\text{cm}^3$

[General Information]
书名=工程电磁场导论
作者=冯慈璋　马西奎主编
页数=357
SS号=10474619
DX号=
出版日期=2000年06月第1版
出版社=高等教育出版社